ШАРЛЬ БРІО

УЧЕБНИКЪ МЕХАНИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ ТЕПЛОТЫ

ВЪ ДВУХЪ ЧАСТЯХЪ

ПЕРЕВЕЛЪ
съ нѣмецкаго изданія Д-ра Г. Вебера
АРІАНЪ ЕМЕЛЬЯНОВЪ

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Типографія В. А. Полетики (Литейный пр., № 42)
1876

ШАРЛЬ БРІО.

УЧЕБНИКЪ

МЕХАНИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ ТЕПЛОТЫ.

ВЪ ДВУХЪ ЧАСТЯХЪ.

ПЕРЕВЕЛЪ
съ нѣмецкаго изданія Д-ра Г. Вебера
АРІАНЪ ЕМЕЛЬЯНОВЪ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія В. А. Полетики (Литейный пр., № 42).
1876.

ПРЕДИСЛОВІЕ КЪ ОРИГИНАЛУ.

Эта книга заключаетъ въ себѣ лекціи, читанныя мною въ Сорбоннѣ въ 1867—1868 учебномъ году. Она раздѣляется на двѣ части, изъ которыхъ первая спеціально разсматриваетъ такъ называемыя тепловыя явленія, вторая же — явленія электричества. — Механическая теорія теплоты развилась въ короткое время такъ, что охватила почти всю физику; она приводитъ дѣйствіе силъ природы къ одной и той же мѣрѣ, — къ единицѣ механической работы. Мое намѣреніе было — изложить главныя начала этой новой науки и вывести ихъ, на сколько это возможно въ настоящее время, изъ общихъ законовъ механики.

Я заимствовалъ многое изъ знаменитаго труда Клаузіуса, представляющаго собраніе самостоятельныхъ его разсужденій о механической теоріи теплоты; я воспользовался также превосходными работами В. Томсона и Ранкина, а въ главѣ объ истеченіи жидкостей — книгою Цейнера, въ которой этотъ вопросъ разработанъ обстоятельно. При разсматриваніи электрической индукціи я принялъ въ основаніе законъ В. Вебера, который заключаетъ въ себѣ не только законы Кулона и Ампера, какъ частные его случаи, но также всѣ электростатическія, электродинамическія и индуктивныя явленія. Этому закону Вебера суждено, кажется, играть первенствующую роль при изученіи электричества.

Долгъ справедливости обязываетъ меня посвятить эту книгу памяти моего сотоварища Верде (Verdet), ранняя смерть котораго была большой потерей для науки. Онъ избралъ механическую теорію теплоты своимъ любимымъ предметомъ изученія и два года въ Сорбоннѣ читалъ о ней лекціи, на которыхъ я имѣлъ счастье присутствовать. Нѣкоторые изъ его учениковъ составили эти лекціи и заняты въ настоящее время ихъ изданіемъ. Дополненіе моихъ лекцій читатель найдетъ у Верде, такъ какъ я придерживался больше теоріи; лекціи же Верде заключаютъ въ себѣ подробности опытовъ, принятыхъ въ основаніе теоріи и подтвердившихъ ея выводы; кромѣ того, онѣ содержатъ въ себѣ строгую и основательную критику достоинствъ и затрудненій этихъ опытовъ, изъ которыхъ важнѣйшіе принадлежатъ Реньо и Джулю (Joule).

Въ заключеніе я долженъ высказать мою благодарность Маскару (Mascart), принявшему на себя редакцію этихъ лекцій и охотно помогавшему мнѣ въ повѣрочныхъ работахъ и исправленіяхъ, такъ необходимыхъ при изданіи.

Шарль Бріо.

ПРЕДИСЛОВІЕ КЪ НѢМЕЦКОМУ ИЗДАНІЮ.

Хотя мы имѣемъ на нѣмецкомъ языкѣ превосходное руководство по механической теоріи теплоты въ «Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie» *) доктора Густава Цейнера, все-таки нужно быть признательнымъ книгопродавцамъ, взявшимъ на себя изданіе предлежащаго труда на нѣмецкомъ языкѣ. Въ то время какъ вышеупомянутая книга разсматриваетъ механическую теорію теплоты болѣе съ практической точки зрѣнія, и потому излагаетъ подробно только тѣ ея отдѣлы, которые важны въ практической механикѣ, предлежащій же трудъ охватываетъ существенныя части всей теоріи въ настоящемъ ея состояніи. Тѣмъ, кому мало извѣстна эта теорія, — предлагаемое сочиненіе будетъ особенно полезно, какъ введеніе. Я тѣмъ болѣе охотно принялъ предложеніе книгопродавцевъ — заняться нѣмецкимъ изданіемъ этого труда — что особенно интересуюсь второю частью, трактующею объ электричествѣ. Рядъ типографскихъ и редакторскихъ ошибокъ, вкравшихся въ оригиналъ, я исправилъ, не дѣлая существенныхъ перемѣнъ въ текстѣ, а прибавкою замѣчаній — полагаю, что оказалъ услугу нѣкоторымъ читателямъ.

Генрихъ Веберъ.

*) Это сочиненіе переведено на русскій языкъ гг. Лугининымъ и Э. Теннеромъ въ 1861 году подъ заглавіемъ: «Основныя начала механической теоріи теплорода». *Прим. перевод.*

ПРЕДИСЛОВІЕ КЪ РУССКОМУ ИЗДАНІЮ.

Легкіе намеки на то, что теплота, какъ физико-механическое явленіе, есть движеніе, можно найти пожалуй и у древнихъ греческихъ философовъ, считавшихъ *огонь* всемогущимъ дѣятелемъ въ природѣ. Однако, высказываемое ими предположеніе на этотъ счетъ, какъ и множество другихъ натурфилософскихъ взглядовъ, такъ не ясно, что мы можемъ только догадываться о существованіи у нихъ такого предположенія, но отнюдь не ручаться за вѣрность пониманія ихъ мыслей. Гораздо же позднѣе Ньютонъ и Бэконъ прямо высказывали ту мысль, что теплота есть движеніе; но взгляды ихъ не привились къ тогдашнимъ ученымъ физикамъ, потому что они не были подтверждены вѣсскими эмпирическими доводами. Такимъ образомъ вопросъ о сущности теплоты долго вращался на почвѣ безплодной философіи, пока, наконецъ, въ 1842 году, за него ни взялся гейльбронскій врачъ А. Майеръ, въ рукахъ котораго онъ и сдѣлался вполнѣ научнымъ вопросомъ. Почти въ тоже самое время англійскій физикъ Джуль подтвердилъ теоретическія соображенія Майера чисто эмпирическимъ путемъ, опредѣливъ величину механическаго эквивалента теплоты, и съ тѣхъ поръ

новое ученіе о теплотѣ сдѣлалось господствующимъ. Наука еще разъ избавилась отъ нѣкоторыхъ метафизическихъ сущностей и этимъ, конечно, сдѣлала громадный шагъ впередъ по пути развитія натуральной философіи!

Полное изложеніе теоретическихъ взглядовъ новаго ученія читатель найдетъ въ предлагаемомъ переводѣ, а за должнымъ философскимъ освѣщеніемъ сдѣланныхъ здѣсь выводовъ мы совѣтуемъ обратиться къ «Единству физическихъ силъ» А. Секки, переводъ Ф. Павленкова.

Аріанъ Емельяновъ.

СОДЕРЖАНIЕ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Электростатика.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Продолженіе электростатики.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Работа электрическихъ силъ.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Гипотеза объ одной жидкости.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Теорія электрическихъ токовъ.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Термоэлектрическіе токи.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Электрохимическія явленія.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Электродинамика.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Продолженіе электродинамики.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

Явленія индукціи.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Страница.	Строка.	Напечатано.	Слѣдуетъ читать.
21	2 снизу	$-\left(\frac{1}{T'}\right)$	$-\frac{1}{T'}$
24	2 »	$+\sum Lint$	$=\sum Lint$
48	12 сверху	$pv_0(1+\alpha t)$	$p_0 v_0(1+\alpha t)$
63	6 »	нашлн	нашли
71	8 »	$f(t)$	$f(t_2)$
74	6 »	$\frac{T-T_1}{T_2}$	$\frac{T_2-T_1}{T_2}$
88	5 »	v'_0	v_0

На стран. 102-й, въ 7-й стр. сверху

Напечатано:	Слѣдуетъ читать:
$-Ap\frac{du}{dt}Apx\frac{d(u'-u)}{dt}$	$-Ap\frac{du}{dt}-Apx\frac{d(u'-u)}{dt}$

102	8 сверху	$L-Ap(u'-u)]dx$	$[L-Ap(u'-u)]dx$
113	5 снизу	уравненіе.	уравненіе,
125	5 »	T	T'
129	5 »	$\frac{1}{11}+$	$\frac{1}{11}$
133	17 »	T'_2	T_2

Страница.	Строка.	Напечатано.	Слѣдуетъ читать.
146 . . .	3 » .	$\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c}{C}}$	$\left(1+\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c}{C}}$
151 . . .	12 » .	$\int_{p_2}^{p_1} vdp$	$\int_{p}^{p_1} vdp$
	15 » .	$\int_{p}^{p_1} vdp$	$\int_{p_2}^{p_1} vdp$
153 въ фигурѣ 31 подъ буквою T_2' напечатано U_2, а должно быть U'_2.			
174 . . .	5 снизу .	вообщее	вообще
221 . . .	4 сверху.	$\frac{dV_1^2}{dx^2}$	$\frac{d^2V_1}{dx^2}$
222 . . .	11 » .	стороны суть, . . .	стороны, суть
278 . . .	4 снизу .	электрическихъ . .	электростатическихъ
291 . . .	3 » .	$aba'b$	$aba'b'$
299 . . .	1 » .	$(V_a - V')_g$	$(V_a - V'_g)$
302 . . .	16 » .	H_{fa}	H_{fg}

ВВЕДЕНІЕ.

1. Свѣтовыя явленія приписываютъ колебаніямъ упругаго вещества, наполняющаго пространство и проникающаго всѣ тѣла. Это вещество, такъ-называемый свѣтовой эфиръ, предполагаютъ состоящимъ изъ атомовъ, удаленныхъ другъ отъ друга и одаренныхъ отталкивательными силами, направленными по соединяющей ихъ линіи. Эти силы пропорціональны массамъ атомовъ и суть функціи разстояній между ними.

2. Вѣсомыя тѣла состоятъ также изъ атомовъ, взаимно дѣйствующихъ другъ на друга. Что бы объяснить явленія преломленія, необходимо допустить, что средняя плотность эфира въ различныхъ преломляющихъ средахъ не одинакова съ плотностью его въ безвоздушномъ пространствѣ, и что, слѣдовательно, вѣсомая матерія оказываетъ вліяніе на атомы эфира. Предположимъ, напримѣръ, что она притягиваетъ ихъ: тогда каждый вѣсомый атомъ будетъ окруженъ эфирной атмосферой, плотность которой болѣе плотности эфира въ пустомъ пространствѣ и чрезвычайно быстро возрастаетъ къ центру *). Избытокъ эфира, накопившагося около каждаго атома, есть масса этой атмосферы **). Совокупное дѣйствіе, производимое

---

*) Такую систему Редтенбахеръ называетъ динамидою.

Примѣч. переводч.

**) Это странное выраженіе, къ счастью, не встрѣчается болѣе во всемъ курсѣ.

Прим. перев.

двумя вѣсомыми массами m и m' другъ на друга, можно разсматривать какъ равнодѣйствующую двухъ силъ: одной притягательной, происходящей отъ вѣсомыхъ массъ и выражаемой формулою $\frac{mm'a}{r^n}$, гдѣ r означаетъ разстояніе между разсматриваемыми атомами, и другой — отталкивательной, происходящей отъ дѣйствія обѣихъ эфирныхъ атмосферъ и выражаемой формулою $\frac{mm'b}{r^{n+p}}$; равнодѣйствующая же выразится посредствомъ

$$\varphi = \frac{mm'a}{r^n} - \frac{mm'b}{r^{n+p}} = \frac{mm'a}{r^n}\left(1 - \frac{b}{ar^p}\right)$$

или, полагая $r_\circ^p = \frac{b}{a}$,

$$\varphi = \frac{mm'a}{r^n}\left[1 - \left(\frac{r_\circ}{r}\right)^p\right]$$

Отсюда видно, что при $r = r_\circ$ будетъ равновѣсіе. и что φ выражаетъ притягательную силу, если разстояніе r болѣе $r_\circ$, и, напротивъ того, φ — отталкивательная сила при r меньшемъ $r_\circ$.

3. Теперь легко понять, что извѣстное число атомовъ, подъ вліяніемъ взаимнодѣйствія, должно образовать правильную группу. Такую группу называютъ молекулею. Дѣйствіе происшедшей такимъ образомъ молекули A на молекулю B не можетъ быть вообще выражено одною равнодѣйствующею: оно, вѣрнѣе сказать, сводится на силу, приложенную къ центру тяжести молекули B. и на пару силъ. Эта пара вращаетъ молекулю B и сообщаетъ ей опредѣленное положеніе относительно молекули A; сила же будетъ или притягательная, или отталкивательная, а равновѣсіе произойдетъ при одномъ только опредѣленномъ положеніи. Такимъ образомъ объясняется кристаллизація.

4. Принимая во вниманіе все вышесказанное, мы представляемъ себѣ тѣла состоящими изъ атомовъ, которые могутъ быть разсматриваемы какъ дѣйствующія другъ на друга матеріальныя точки. Дѣйствіе, происходящее между двумя точками, состоитъ изъ двухъ

равныхъ, но противоположныхъ силъ, изъ которыхъ одна дѣйствуетъ на первую точку, а другая — на вторую. Эта двойная сила пропорціональна произведенію изъ массъ матеріальныхъ точекъ и, кромѣ того, есть функція разстояній между ними. Она притягательная, или отталкивательная, смотря по тому, сближаетъ ли она матеріальныя точки, или удаляетъ ихъ одну отъ другой. Эта сила постоянно стремится привести ихъ въ равновѣсіе, если какая-нибудь посторонняя причина выведетъ ихъ изъ этого положенія.

5. Вслѣдствіе такого перемѣщенія происходитъ внутреннее колебаніе, которое можетъ принимать самыя разнообразныя формы. Въ движеніи можетъ быть или только одинъ эфиръ, или же будутъ колебаться внутри молекули матеріальные атомы, ее составляющіе, увлекая за собою окружающую ихъ эфирную атмосферу; или, наконецъ, всѣ молекули будутъ измѣнять взаимное свое положеніе. Полагаютъ, что совокупность этихъ колебаній и составляетъ то, что называется теплотою. Тепловыя колебанія производятъ перемѣну въ составѣ тѣлъ; ихъ дѣйствіе можетъ перейдти внаружу и наоборотъ: внѣшнее дѣйствіе можетъ привести въ колебаніе молекули тѣла и этимъ произвести тепловыя явленія. — Термодинамика есть наука объ отношеніяхъ, существующихъ между тепловыми явленіями, ихъ причинами и слѣдствіями. Теплота, разсматриваемая какъ колебательное движеніе, сводится на общіе законы механики, а потому термодинамика основывается на началахъ общей механики.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ЗАМѢЧАНІЯ.

Общія свойства движенія системъ.

Движеніе центра тяжести. — Теорема моментовъ количествъ движенія. — Теорема живыхъ силъ. — Работа внутреннихъ силъ. — Дѣйствительная и потенціальная энергія. — Вычисленіе дѣйствительной энергіи. — Вліяніе колебательнаго движенія на потенціальную энергію. — Случай дѣйствія внѣшнихъ силъ. — Работа внѣшнихъ силъ давленія.

6. Разсмотримъ теперь систему матеріальныхъ точекъ, находящихся одновременно подъ вліяніемъ взаимодѣйствія и внѣшнихъ силъ. Ясно, что движеніе каждой матеріальной точки происходитъ отъ совокупнаго дѣйствія всѣхъ силъ, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ.

Означивъ, поэтому, массу матеріальной точки чрезъ m, чрезъ x, y, z — ея координаты относительно трехъ неподвижныхъ прямоугольныхъ осей и, наконецъ, чрезъ X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, ... слагающія силъ, дѣйствующихъ на эту точку, получимъ три уравненія:

$$(1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X + X_1 + \ldots.. \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1 + \ldots.. \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1 + \ldots.. \end{cases}$$

Каждая точка системы дастъ три подобныхъ уравненія. Изъ нихъ можно вывести многія важныя теоремы.

Движеніе центра тяжести.

7. Совокупляя всѣ уравненія, отнесенныя къ осямъ X-овъ, Y-овъ и Z-овъ, получимъ слѣдующія три уравненія:

$$(2)\quad \begin{cases} \sum m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum X \\ \sum m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum Y \\ \sum m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum Z \end{cases}$$

или также

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sum m\dfrac{dx}{dt} = \sum X \\ \dfrac{d}{dt}\sum m\dfrac{dy}{dt} = \sum Y \\ \dfrac{d}{dt}\sum m\dfrac{dz}{dt} = \sum Z \end{cases}$$

Знакъ суммы въ лѣвой части уравненій простирается на всѣ точки системы; въ правой же, напротивъ того, — на всѣ силы дѣйствующія на разныя точки. Такъ какъ внутреннія силы попарно равны и направлены противоположно, то проэкціи ихъ также равны и противоположны по знаку, слѣдовательно онѣ исчезаютъ изъ правой части уравненій (3). Такимъ образомъ эти уравненія содержатъ только внѣшнія силы и приводятъ къ теоремѣ:

Теорема 1. *Производная по времени отъ суммы проэкцій количествъ движенія всѣхъ точекъ системы на любую неподвижную ось равна суммѣ проэкцій внѣшнихъ силъ на туже самую ось.*

8. Если точки не подвержены дѣйствію внѣшнихъ силъ, то

правыя части вышенаписанныхъ уравненій равны нулю, и изъ нихъ получаются слѣдующія уравненія:

$$(4) \quad \begin{cases} \sum m \dfrac{dx}{dt} = A \\ \sum m \dfrac{dy}{dt} = B \\ \sum m \dfrac{dz}{dt} = C \end{cases}$$

въ которыхъ A, B, C означаютъ постоянныя величины. Такимъ образомъ получается слѣдствіе:

Слѣдствіе. Если система матеріальныхъ точекъ не подвержена дѣйствію внѣшнихъ силъ, то сумма проэкцій количествъ движенія всѣхъ точекъ системы на любую неподвижную ось равна постоянной величинѣ.

9. Разсматриваніе центра тяжести системы даетъ возможность выразить эту теорему и другимъ еще образомъ. Если x_1, y_1, z_1 означаютъ координаты центра тяжести, а M — всю массу системы, то

$$(5) \quad \begin{cases} Mx_1 = \sum mx \\ My_1 = \sum my \\ Mz_1 = \sum mz \end{cases}$$

слѣдовательно, уравненія (2) примутъ видъ:

$$(6) \quad \begin{cases} M \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \sum X \\ M \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \sum Y \\ M \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \sum Z \end{cases}$$

Теорема II. Центръ тяжести системы движется точно такъ, какъ если бы въ немъ была сосредоточена вся масса, а внѣшнія силы были бы всѣ параллельны между собою и имѣли бы его точкою приложенія.

Слѣдствіе. Если на систему не дѣйствуютъ внѣшнія силы, то центръ тяжести остается въ покоѣ, или же движется прямолинейно и равномѣрно.

Теорема моментовъ количествъ движенія.

10. Если умножить первое изъ уравненій (1) на y, второе на x и потомъ первое вычесть изъ втораго, то получимъ:

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = x(Y + Y_1 + \ldots) - y(X + X_1 + \ldots)$$

Совокупляя всѣ подобнаго рода уравненія, относящіяся къ различнымъ точкамъ системы, получимъ уравненіе:

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum(xY - yX)$$

Соединяя второе уравненіе изъ (1) съ третьимъ и третье съ первымъ, получимъ три уравненія:

$$(7) \quad \begin{cases} \sum m\left(x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum(xY - yX) \\ \sum m\left(y\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum(yZ - zY) \\ \sum m\left(z\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = \sum(zX - xZ) \end{cases}$$

или также

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sum m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)=\sum(xY-yX) \\ \dfrac{d}{dt}\sum m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)=\sum(yZ-zY) \\ \dfrac{d}{dt}\sum m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)=\sum(zX-xZ) \end{cases}$$

Выраженіе $xY-yX$ есть моментъ силы F относительно оси Z-овъ.

Такъ какъ внутреннія силы попарно равны и противоположно направлены, то и ихъ моменты относительно любой оси также равны, но противоположны; слѣдовательно внутреннія силы исчезаютъ изъ членовъ правой части. Выраженіе $m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)$ представляетъ моментъ количества движенія матеріальной точки m относительно оси Z-овъ; поэтому получимъ:

Теорема III. Производная по времени отъ суммы моментовъ количествъ движенія всѣхъ точекъ системы относительно любой неподвижной оси равна суммѣ моментовъ внѣшнихъ силъ относительно той же оси.

11. Если система не подвержена дѣйствію внѣшнихъ силъ, то правая часть вышенаписанныхъ уравненій есть нуль и, слѣдовательно,

$$(9)\quad \begin{cases} \sum m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)=C' \\ \sum m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)=A' \\ \sum m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)=B' \end{cases}$$

гдѣ A', B', C' означаютъ постоянныя величины. И такъ, отсюда слѣдуетъ:

Слѣдствіе. Если на систему не дѣйствуютъ внѣшнія силы, то сумма моментовъ количествъ движенія относительно любой неподвижной оси есть постоянная величина.

12. Эта теорема пригодна также и для подвижной оси, если только она постоянно сохраняетъ свое направленіе и, притомъ, проходитъ черезъ центръ тяжести системы. Назовемъ, какъ прежде, координаты центра тяжести чрезъ x_1, y_1, z_1, а чрезъ ξ, η, ζ— координаты любой точки относительно осей, проходящихъ чрезъ центръ тяжести и параллельныхъ неподвижнымъ осямъ; тогда получимъ: $x=x_1+\xi$, $y=y_1+\eta$, $z=z_1+\zeta$. Подставляя эти значенія въ первое изъ уравненій (7) и замѣчая, что

$$\sum m\xi=0,\ \sum m\eta=0,\ \sum m\zeta=0,\ \text{получимъ:}$$

$$M\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)+\sum m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)$$

$$=x_1\sum Y-y_1\sum X+\sum(\xi Y-\eta X)$$

Вслѣдствіе уравненій (6), это уравненіе упростится, и тогда

$$\sum m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)=\sum(\xi Y-\eta X)$$

Оно имѣетъ тотъ же самый видъ, какъ и уравненіе (7).

Теорема живыхъ силъ.

13. Подъ живою силою матеріальной точки понимаютъ вообще произведеніе изъ массы этой точки на квадратъ ея скорости. Такъ какъ въ механикѣ разсматривается не эта величина, а половина ея, то мы подъ живою силою матеріальной точки будемъ подразумѣвать половину произведенія изъ массы ея на квадратъ скорости. Извѣстно, что измѣненіе живой силы матеріальной точки въ какое угодно время равно суммѣ работъ силъ, дѣйствовавшихъ на точку

въ это же самое время. Если составимъ сумму всѣхъ подобныхъ уравненій, относящихся къ различнымъ точкамъ системы, то получимъ такое уравненіе:

$$(10)\qquad \Delta\sum\frac{mv^2}{2}=\sum LF$$

гдѣ LF означаетъ работу (labor) силы F. Отсюда слѣдуетъ

Теорема IV. Измѣненіе суммы живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы въ опредѣленное время равно суммѣ работъ всѣхъ силъ, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ, дѣйствовавшихъ въ это же самое время на различныя точки системы.

Примѣнимъ эту теорему къ безконечно малому перемѣщенію. Пусть ds будетъ перемѣщеніе точки m, dx, dy, dz — его проэкціи на оси координатъ. Работа силы F, дѣйствующей на эту точку, равна суммѣ работъ ея составляющихъ; слѣдовательно элементарная работа $F=Xdx+Ydy+Zdz$, а потому

$$(11)\qquad d\sum\frac{mv^2}{2}=\sum Xdx+\sum Ydy+\sum Zdz$$

14. Существуетъ весьма простое отношеніе между живою силою движенія системы относительно неподвижныхъ осей и живою силою ея относительно центра тяжести. Назовемъ чрезъ x_1, y_1, z_1 координаты центра тяжести и положимъ, какъ въ n° 12, $x=x_1+\xi$, $y=y_1+\eta$, $z=z_1+\zeta$, тогда получимъ:

$$\sum\frac{mv^2}{2}=\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]$$
$$+\sum m\left[\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right]$$

Если означимъ черезъ V скорость центра тяжести, а черезъ u — скорость какой-нибудь точки относительно этого послѣдняго, и при томъ замѣтимъ, что послѣдній членъ равенъ нулю, то предъидущее уравненіе сведется на

$$(12)\qquad \sum\frac{mv^2}{2}=\frac{MV^2}{2}+\sum\frac{mu^2}{2}$$

что даетъ теорему:

Теорема V. Полная живая сила системы равна живой силѣ всей массы, предполагая ее сосредоточенною въ центрѣ тяжести, увеличенной живою силою системы, при движеніи ея относительно центра тяжести.

15. Эта теорема даетъ намъ возможность указать на теорему живыхъ силъ какъ на пригодную и для движенія системы относительно центра тяжести, при чемъ уравненіе (11) будетъ:

$$d\frac{MV^2}{2}+d\sum\frac{mu^2}{2}=dx_1\sum X+dy_1\sum Y+dz_1\sum Z$$
$$+\sum(Xd\xi+Yd\eta+Zd\zeta)$$

Въ n°9 мы показали, что движеніе центра тяжести есть именно такое, какъ если бы въ немъ была сосредоточена вся масса, а всѣ силы были бы параллельны между собою и имѣли бы его точкою приложенія. Примѣняя къ этой точкѣ, массою M, начало живыхъ силъ, получимъ:

$$d\frac{MV^2}{2}=dx_1\sum X+dy_1\sum Y+dz_1\sum Z$$

и вышеприведенное уравненіе сведется на

$$(13)\qquad d\sum\frac{mu^2}{2}=\sum(Xd\xi+Yd\eta+Zd\zeta)\cdot$$

И такъ, теорема живыхъ силъ сохраняетъ свое значеніе, если разсматривать движеніе системы относительно только центра тяжести.

Теорема VI. Если вычислить живую силу каждой точки, а также и работу каждой силы, разсматривая движеніе относительно центра тяжести, то измѣненіе суммы живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы равно суммѣ работъ всѣхъ силъ, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ, дѣйствующихъ на эти точки.

Работа внутреннихъ силъ.

16. Въ приложеніяхъ теоремы живыхъ силъ слѣдуетъ отличать внутреннія силы отъ внѣшнихъ. Взаимное дѣйствіе двухъ молекулей m и m', разстояніе между которыми r, слагается изъ двухъ равныхъ и противоположныхъ силъ $mm'\varphi(r)$, изъ которыхъ одна дѣйствуетъ на первую точку, а другая — на вторую; ихъ направленіе совпадаетъ съ соединяющею ихъ линіею. Функція $\varphi(r)$ — или положительная, или отрицательная, смотря по тому, дѣйствуетъ ли сила притягательно, или отталкивательно. — Пусть x, y, z будутъ координаты точки m, x', y', z' — точки m' относительно системы неподвижныхъ осей; тогда слагающія этой силы, дѣйствующія на m, будутъ:

$$X = mm'\varphi(r)\frac{x'-x}{r}$$

$$Y = mm'\varphi(r)\frac{y'-y}{r}$$

$$Z = mm'\varphi(r)\frac{z'-z}{r}$$

а элементарная работа этой силы при абсолютномъ движеніи имѣетъ слѣдующее выраженіе:

$$Xdx + Ydy + Zdz = mm'\frac{\varphi(r)}{r}[(x'-x)dx + (y'-y)dy + (z'-z)dz]$$

Такимъ же образомъ элементарная работа силы, дѣйствующей на точку m', будетъ:

$$-(Xdx' + Ydy' + Zdz') = -mm'\frac{\varphi(r)}{r}[(x'-x)dx' + (y'-y)dy' + (z'-z)dz']$$

Совокупляя, получимъ элементарную работу взаимодѣйствія обѣихъ молекулей:

$$-\frac{mm'\varphi(r)}{r}[(x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz)]$$

Но изъ уравненія $r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$ слѣдуетъ, что

$$rdr = (x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz)$$

и выраженіе работы будетъ:

$$-mm'\varphi(r)dr = mm'd\psi(r)$$

полагая $-\varphi(r) = \psi'(r)$

Поэтому сумма элементарныхъ работъ внутреннихъ силъ есть

$$\sum mm'd\psi(r) = d\sum mm'\psi(r)$$

Сумма состоитъ изъ такого числа членовъ, сколько можетъ быть сочетаній по два между матеріальными точками. Это выраженіе содержитъ только взаимныя разстоянія между точками системы; отсюда слѣдуетъ, что работа внутреннихъ силъ при относительномъ движеніи должна быть точно такая же, какъ и при абсолютномъ.

17. Такъ какъ разстояніе r между двумя точками выражается въ разности ихъ координатъ, то, слѣдовательно, величина $\Sigma mm'\psi(r)$ есть функція координатъ всѣхъ точекъ системы, функція, которую мы означимъ чрезъ $f(x, y, z, x', y', z' \ldots)$ и которая зависитъ только отъ относительнаго положенія точекъ. Сумма элементарныхъ работъ внутреннихъ силъ есть полный дифференціалъ

$df(x, y, z, x', y', z', \ldots)$ этой функціи. Положимъ теперь, что система переходитъ изъ одного опредѣленнаго состоянія, означеннаго характеристикой 1, въ другое, означенное чрезъ 2, — тогда для этого конечнаго перехода получимъ:

$$\sum L\,int = f(x_2, y_2, z_2, x_2', y_2', z_2', \ldots) - f(x_1, y_1, z_1, x_1', y_1', z_1', \ldots)$$

или проще

$$(14) \qquad \sum L\,int = f_2 - f_1$$

гдѣ $L\,int$ означаетъ работу внутреннихъ силъ (labor internus).

Положимъ, что система не подвержена дѣйствію внѣшнихъ силъ; тогда уравненіе (10) живыхъ силъ сведется на

$$\Delta \sum \frac{mv^2}{2} = f_2 - f_1$$

или

$$\sum \frac{mv_2^2}{2} - \sum \frac{mv_1^2}{2} = f_2 - f_1$$

Замѣнимъ здѣсь функцію f функціею $\Pi(x, y, z, x', \ldots)$, имѣющею противоположный знакъ; тогда вышенаписанное уравненіе приметъ видъ:

$$\sum \frac{mv_2^2}{2} - \sum \frac{m\,v_1^2}{2} = \Pi_1 - \Pi_2$$

или

$$\sum \frac{mv_2^2}{2} + \Pi_2 = \sum \frac{m\,v_1^2}{2} + \Pi_1$$

Поэтому величина $\sum \frac{mv^2}{2} + \Pi$ имѣетъ одно и тоже значеніе въ двухъ любыхъ состояніяхъ системы; слѣдовательно, значеніе это постоянно втеченіе всего движенія, а потому

$$(15) \qquad \sum \frac{mv^2}{2} + \Pi = C$$

что даетъ теорему:

Теорема VII. Если система не подвержена дѣйствію внѣшнихъ силъ, то полная ея живая сила, увеличенная функціею П, есть постоянная величина.

18. Это уравненіе пригодно также и для движенія относительно центра тяжести, а именно (n°14):

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \sum \frac{mu^2}{2}$$

Далѣе, извѣстно, что если на систему не дѣйствуютъ внѣшнія силы, то движеніе центра тяжести прямолинейно и равномѣрно (n°9); поэтому первый членъ $\frac{MV^2}{2}$ полной живой силы есть постоянная величина. Съ другой стороны, мы уже замѣтили, что функція $\Pi = -\Sigma mm'\psi(r)$ остается тою же самою, какъ при относительномъ, такъ и при абсолютномъ движеніяхъ, т. е. $\Pi(x, y, z, x', \ldots) = \Pi(\xi, \eta, \zeta, \xi', \ldots)$. Поэтому, если введемъ вышенаписанное значеніе $\sum \frac{mv^2}{2}$ въ уравненіе (15) и перенесемъ постоянную величину $\frac{MV^2}{2}$ въ другую часть равенства, то получимъ:

$$(16) \qquad \sum \frac{mu^2}{2} + \Pi = C'$$

Отсюда выводимъ теорему:

Теорема VIII. Если система не подвержена дѣйствію внѣшнихъ силъ, то внутренняя живая сила, увеличенная функціею П, есть постоянная величина.

Объ энергіи *).

19. Покажемъ теперь болѣе точное значеніе функціи П. Мы положили, что $-\varphi(r) = \psi'(r)$, $\Sigma mm'\psi(r) = f$ и $\Pi = -f$. Функ-

*) Общепонятныя разсужденія объ энергіи и о различныхъ ея видахъ можно найти въ сочиненіи Бальфура Стюарта: «Сохраненіе энергіи», перев. подъ редакціею П. А. Хлѣбникова. *Примѣч. перев.*

ція $\psi(r)$, а слѣдовательно также функціи f и Π, какъ зависящія отъ нея, заключаютъ въ себѣ произвольную постоянную величину.

Въ механикѣ доказывается, что если для извѣстнаго состоянія системы значеніе функціи f, называемой функціей силъ, будетъ maximum, то это состояніе будетъ положеніемъ устойчиваго равновѣсія. Если функція f имѣетъ нѣсколько maximum-овъ, то мы будемъ разсматривать наибольшій изъ нихъ. Ясно, что постоянную величину можно опредѣлить, приравнявъ нулю самое бо́льшее изъ всѣхъ значеній функціи f: въ такомъ случаѣ функція f постоянно будетъ имѣть отрицательное значеніе, а, слѣдовательно, функція Π, равная ей, но противоположная по знаку, постоянно будетъ положительная.

Положимъ, что тѣло выходитъ изъ такого положенія равновѣсія, которое соотвѣтствуетъ наибольшему значенію, и достигаетъ дѣйствительнаго своего положенія, — тогда работа внутреннихъ силъ во время этого перехода будетъ $f(x, y, z, ...) - o$. Эта отрицательная величина представляетъ работу, необходимую для переведенія тѣла изъ принятаго имъ положенія устойчиваго равновѣсія въ его дѣйствительное положеніе. Наоборотъ, если заставить тѣло возвратиться въ положеніе его устойчиваго равновѣсія, то работа внутреннихъ силъ будетъ положительная, равная предъидущей, но противоположная по знаку, т. е.

$$o - f(x, y, z, \ldots) = \Pi\,(x, y, z, \ldots)$$

Поэтому функція Π представляетъ положительную работу, которую были бы способны произвести молекулярныя силы, если бы тѣло возвратилось изъ дѣйствительнаго своего положенія въ положеніе разсмотрѣннаго устойчиваго равновѣсія.

20. И такъ, лѣвая часть уравненія (15) состоитъ изъ двухъ дѣйствительно положительныхъ членовъ, сумма которыхъ постоянна. Оба эти члена могутъ переходить одинъ въ другой такъ, что съ уменьшеніемъ одного изъ нихъ другой увеличивается на ту же самую величину. Первый членъ есть сумма живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы, а второй — потенціальная работа молекулярныхъ силъ, или наибольшая работа, которую онѣ въ состоя-

ніи произвести. Весьма раціонально дать этимъ величинамъ названія, которыя напоминали бы соотвѣтствующія имъ величины въ механикѣ.

Мы примемъ обозначенія, предложенныя Ранкиномъ, и будемъ называть дѣйствительною энергіею системы сумму живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы, а потенціальною энергіею — наибольшую работу, какую въ состояніи произвести внутреннія силы. Сумма этихъ двухъ величинъ есть полная энергія системы.

Обозначимъ дѣйствительную энергію чрезъ V, потенціальную — чрезъ W и полную — чрезъ U, тогда $U = V + W$.

Мы видѣли (n° 14), что дѣйствительная энергія системы $V = \sum \frac{mv^2}{2}$ распадается на два члена: одинъ $\frac{MV^2}{2}$, который назовемъ энергіею поступательнаго движенія, и другой $\sum \frac{mu^2}{2}$, представляющій дѣйствительную внутреннюю энергію, которую означимъ чрезъ V_i; тогда $U_i = V_i + W$, т. е. сумма дѣйствительной внутренней энергіи и потенціальной равна полной внутренней или, короче, внутренней энергіи всей системы.

При помощи этихъ обозначеній, можно выразить весьма просто теоремы VII и VIII.

Теорема IX. Если система не подвержена дѣйствію внѣшнихъ силъ, то внутренняя и полная ея энергіи остаются постоянными.

Принимая опять во вниманіе все предъидущее, увидимъ, что если система не подвержена дѣйствію внѣшнихъ силъ, то три главныя величины остаются постоянными:

1) Сумма проэкцій количествъ движенія на любую неподвижную ось, а слѣдовательно и энергія поступательнаго движенія;

2) Сумма моментовъ количествъ движенія относительно любой неподвижной оси;

3) Внутренняя энергія системы.

21. Примѣръ легко уяснитъ, что̀ разумѣется подъ потенціальною энергіею.

Разсмотримъ систему, состоящую изъ двухъ молекулей, массою m и m'.

Пусть молекули будутъ подвержены только своему взаимнодѣйствію, выражаемому формулою (n°2)

$$\frac{mm'a}{r^n}\left[1-\left(\frac{r_\circ}{r}\right)^p\right]$$

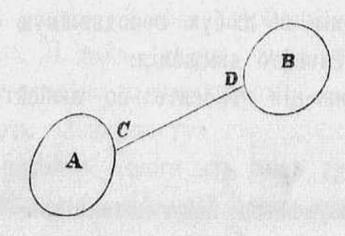
Равновѣсіе наступитъ тогда, когда обѣ молекули будутъ находиться на разстояніи $r_\circ$ одна отъ другой, и это положеніе будетъ положеніемъ устойчиваго равновѣсія. Пусть A и B — положенія молекулей при равновѣсіи (фиг. 1). Допустимъ далѣе, что онѣ передвинулись въ A' и B', разстояніе между которыми r будетъ болѣе чѣмъ $r_\circ$: въ этомъ случаѣ произойдетъ притяженіе. Если молекули стремятся возвратиться къ своему положенію равновѣсія, то силы производятъ положительную работу, которая будетъ тѣмъ больше, чѣмъ болѣе удалились молекули отъ своего положенія равновѣсія. Далѣе, если молекули перешли въ A_1 и B_1, разстояніе между которыми r менѣе $r_\circ$, то произойдетъ отталкиваніе; если заставить ихъ возвратиться въ положеніе равновѣсія, то силы опять-таки произведутъ положительную работу. Эта положительная работа и есть потенціальная энергія системы, состоящей изъ двухъ молекулей въ положеніяхъ $A'B'$ и A_1B_1.

Фиг. 1.

A′ A A₁ B₁ B B′

22. Легко замѣтить, что полная энергія тѣла извѣстнымъ образомъ измѣряетъ механическую силу. Разсмотримъ, напримѣръ, два тѣла A и B (фиг. 2), соединенныя нерастяжимою и неимѣющею массы нитью CD. Положимъ, что внѣшнія силы не дѣйствуютъ; тогда полная энергія системы, состоящей изъ этихъ двухъ тѣлъ, должна быть постоянна; энергія же нити есть нуль, а такъ какъ масса ея нуль, то и дѣйствительная ея энергія — также нуль. Съ другой стороны, такъ какъ эта нить нерастяжима, то

фиг. 2.



обѣ растягивающія силы дадутъ двѣ равныя, но противоположныя по знаку работы; слѣдовательно и потенціальная энергія нити — тоже нуль. Такимъ образомъ, означивъ чрезъ U энергію тѣла A, чрезъ U' — таковую же тѣла B, получимъ для этой системы весьма простое уравненіе:

$$U + U' = \text{Const.}$$

При посредствѣ нити, оба члена этой суммы могутъ переходить одинъ въ другой: если U уменьшается, то U' на столько же увеличивается, что̀ именно и характеризуетъ механическое дѣйствіе тѣла A на тѣло B. Допустимъ, что U уменьшается до нуля, и въ этотъ моментъ устранимъ связь между обоими тѣлами, перерѣзавъ нить; тогда энергія тѣла A будетъ равна нулю, а новая энергія U'' тѣла B, по общей теоремѣ, будетъ равна суммѣ двухъ предъидущихъ; слѣдовательно $U'' = U + U'$. Съ этого момента энергія тѣла A постоянно равна нулю; — оно достигло положенія устойчиваго равновѣсія, которое будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока ни подѣйствуютъ внѣшнія силы. Такимъ образомъ полная энергія U служитъ мѣрою наибольшаго механическаго дѣйствія, какое только можетъ произвести одно тѣло на другое.

Энергія колебательнаго движенія.

23. Мы уже видѣли (n°14), что дѣйствительная энергія системы слагается изъ энергіи поступательнаго движенія центра тяжести и дѣйствительной внутренней энергіи, т. е. дѣйствительной энергіи движенія относительно оси, проходящей чрезъ центръ тяжести. При этой послѣдней энергіи имѣется еще такая, которую нужно отличать отъ энергіи видимаго движенія: она относится къ колебательному движенію, которое весьма быстро и не можетъ быть замѣчено непосредственно.

Разсмотримъ сначала систему матеріальныхъ точекъ, неимѣющую видимаго движенія, а находящуюся только въ колебаніи. Каждая матеріальная точка колеблется около своего средняго положенія. Изобразимъ координаты этого послѣдняго чрезъ x, y, z, а координаты матеріальной точки во время этого движенія — чрезъ

$x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$. Такъ какъ видимаго движенія не существуетъ, то координаты x, y, z не зависятъ отъ времени; слѣдовательно получимъ, что

$$v^2=\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

Любое колебательное движеніе можно разсматривать какъ составное изъ простыхъ колебаній, выражаемыхъ формулою *)

$$\xi=A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)$$

$$\eta=B\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\beta\right)$$

$$\zeta=C\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\gamma\right)$$

Для простаго колебанія имѣемъ:

$$v^2=\frac{4\pi^2}{T^2}\left[A^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)+B^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\beta\right)\right.$$
$$\left.+C^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\gamma\right)\right]$$

или

$$v^2=\frac{2\pi^2}{T^2}\left[A^2+B^2+C^2-A^2\cos\left(\frac{4\pi t}{T}+2\alpha\right)-\ldots\right]$$

Живая сила измѣняется впродолженіе колебанія, и среднее значеніе ея получится изъ опредѣленнаго интеграла:

$$(17)\qquad \frac{1}{T}\int_0^T\frac{mv^2}{2}\,dt=m\pi^2\,\frac{A^2+B^2+C^2}{T^2}$$

*) Выводъ уравненія колебательнаго движенія можно найти въ «Курсѣ наблюдательной физики» Ѳ. Петрушевскаго. Т. I, стр. 307. С.-Петербургъ, 1874 года. *Прим. перев.*

При сложномъ колебательномъ движеніи квадратъ скорости выразится посредствомъ

$$v^2=4\pi^2\left\{\left[\sum\frac{A}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)\right]^2+\left[\sum\frac{B}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\beta\right)\right]^2\right.$$
$$\left.+\left[\sum\frac{C}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\gamma\right)\right]^2\right\}$$

гдѣ $\sum\frac{A}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)$ есть сумма членовъ вида

$$\frac{A}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)+\frac{A'}{T'}\sin\left(\frac{2\pi t}{T'}+\alpha'\right)+\ldots\ldots$$

и, слѣдовательно, квадратъ ея равенъ

$$\sum\frac{A^2}{T^2}\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)+\sum\frac{2AA'}{TT'}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T'}+\alpha'\right)$$

Преобразовавъ, какъ прежде, члены первой суммы и опредѣливъ среднее значеніе времени, весьма большаго относительно каждаго періода, мы можемъ пренебречь періодическими членами, и тогда получимъ:

$$\frac{1}{2}\sum\frac{A^2}{T^2}$$

Члены второй суммы могутъ быть преобразованы слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{2AA'}{TT'}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T'}+\alpha'\right)$$
$$=\frac{AA'}{TT'}\left\{\cos\left[2\pi t\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T'}\right)+\alpha-\alpha'\right]\right.$$
$$\left.-\cos\left[2\pi t\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)+\alpha+\alpha'\right]\right\}$$

Поэтому интегралъ правой части есть сумма синусовъ, и среднимъ значеніемъ его для промежутка времени Θ, весьма большаго относительно продолжительности каждаго періода, можно пренебречь. Слѣдовательно, для средняго значенія дѣйствительной энергіи точки m найдемъ:

$$\frac{1}{\Theta}\int_0^\theta \frac{mv^2}{2}\,dt = m\pi^2 \sum \frac{A^2+B^2+C^2}{T^2} \qquad (18)$$

Отсюда вытекаетъ, что средняя энергія какого угодно колебательнаго движенія равна суммѣ среднихъ энергій составляющихъ его простыхъ колебаній.

24. Положимъ, что тѣло одновременно находится въ видимомъ и колебательномъ движеніяхъ. Пусть координаты точки m въ опредѣленный моментъ опять будутъ $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, а координаты x, y, z средняго положенія теперь суть функціи времени. Тогда слагающія скорости этой точки будутъ:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}$$

Для взятой точки слагающая $\frac{dx}{dt}$ видимой скорости можетъ быть разсматриваема какъ постоянная втеченіе періода T, если колебательное движеніе простое, или, общнѣе, — въ промежутокъ времени Θ, весьма малый по своей абсолютной величинѣ, но очень большой относительно каждаго періода, существующаго при сложномъ колебательномъ движеніи. Поэтому можно написать:

$$\frac{1}{\Theta}\int_0^\theta m\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}dt = \frac{1}{\Theta}\,m\frac{dx}{dt}\int_0^\theta \frac{d\xi}{dt}\,dt = \frac{1}{\Theta}\,m\frac{dx}{dt}\Big[\,\xi\,\Big]_0^\theta = 0$$

Далѣе выходитъ, что

$$\frac{1}{\Theta}\int_0^\theta \frac{mv^2}{2}dt = \frac{m}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)$$
$$+\frac{1}{\Theta}\int_0^\theta \frac{m}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)dt$$
$$+\frac{1}{\Theta}\int_0^\theta m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)dt$$

Какъ мы видѣли, послѣдними тремя членами интеграла можно пренебречь, слѣдовательно останется:

$$\frac{1}{\Theta}\int_0^\theta \frac{mv^2}{2}dt = \frac{m}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right) \qquad (19)$$
$$+\frac{1}{\Theta}\int_0^\theta \frac{m}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)dt$$

Первый членъ въ правой части есть живая сила видимаго движенія, второй — средняя живая сила колебаній; слѣдовательно, мы можемъ сказать:

Дѣйствительная энергія тѣла есть сумма энергіи видимаго движенія и энергіи колебаній.

Вліяніе колебаній на потенціальную энергію.

25. Разсмотримъ тѣло, неимѣющее видимаго движенія, но находящееся въ колебаніи. Такъ какъ потенціальная энергія есть функція разстояній различныхъ точекъ, то, слѣдовательно, она зависитъ отъ колебаній и претерпѣваетъ періодическія измѣненія. Такимъ образомъ мы можемъ поставить себѣ задачей: вычислить среднее ея значеніе. Означимъ опять координаты средняго положенія точки m чрезъ x, y, z. Если колебаній не существуетъ, то для потенціальной энергіи имѣемъ:

$$W = F(x, y, z, x', y', z', \ldots)$$

Во время же колебаній координаты точки m будутъ $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, а значеніе потенціальной энергіи —

$$W=F(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta,\ x'+\xi',\ldots.)$$

Такъ какъ координаты перемѣщенія ξ, η, ζ во время колебаній очень малы относительно x, y, z, то функцію эту можно разложить въ быстро сходящійся рядъ и, ограничиваясь вторыми степенями членовъ, написать:

$$W=F(x,y,z,x',y',z',\ldots.)+\frac{dF}{dx}\xi+\frac{dF}{dy}\eta+\frac{dF}{dz}\zeta$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\xi^2+\frac{d^2F}{dy^2}\eta^2+\frac{d^2F}{dz^2}\zeta^2+2\frac{d^2F}{dxdy}\xi\eta+\ldots.\right)$$

Члены первой степени не имѣютъ вліянія на среднее значеніе, а второй — имѣютъ.

Для средняго значенія потенціальной энергіи находимъ такое выраженіе:

$$F(x,y,z,x',y',z',\ldots.)+\frac{1}{4}\left[\frac{d^2F}{dx^2}A^2+\frac{d^2F}{dy^2}B^2\right.$$

$$\left.+\frac{d^2F}{dz^2}C^2+2\frac{d^2F}{dxdy}AB\cos(\alpha-\beta)+\ldots.\right]$$

Отсюда выходитъ, что колебанія измѣняютъ среднее значеніе потенціальной энергіи, хотя среднее положеніе молекули и остается неизмѣннымъ, т. е. не измѣняется видимое состояніе тѣла.

Случай дѣйствія внѣшнихъ силъ.

26. Мы нашли уравненіе (n^o13) живыхъ силъ въ самомъ общемъ случаѣ, т. е.

$$(20)\qquad \Delta\sum\frac{mv^2}{2}=\sum L\,\text{int.}+\sum L\,\text{ext.}$$

гдѣ L int. (labor internus) означаетъ работу внутреннихъ силъ, а L ext. (labor externus) — работу внѣшнихъ силъ. Если тѣло перешло изъ состоянія (1) въ состояніе (2), то (n^o17) имѣемъ:

$$\sum L\,\text{int.}=f_2-f_1=\Pi_1-\Pi_2$$

Такимъ образомъ уравненіе (20) будетъ:

$$\Delta\sum\frac{mv^2}{2}+(\Pi_2-\Pi_1)=\sum L\,\text{ext.}$$

или также

$$\Delta V+\Delta W=\sum L\,\text{ext.}$$

$$(21)\qquad \Delta U=\sum L\,\text{ext.}$$

что даетъ теорему:

Теорема X. Измѣненіе полной энергіи системы равно суммѣ работъ внѣшнихъ силъ.

Мы видѣли, что теорема живыхъ силъ имѣетъ значеніе и при движеніи относительно центра тяжести (n^o15), слѣдовательно

$$\Delta\sum\frac{mu^2}{2}=\sum L'\,\text{int.}+\sum L'\,\text{ext.}$$

гдѣ L' означаетъ работу при относительномъ движеніи. Такъ какъ работа внутреннихъ силъ при относительномъ движеніи такая же, какъ и при абсолютномъ, то это уравненіе можно привести къ виду:

$$\Delta V_1+\Delta W=\sum L'\,\text{ext.}$$

или

$$(22)\qquad \Delta U_1=\sum L'\,\text{ext.}$$

что даетъ теорему:

Теорема XI. Измѣненіе внутренней энергіи системы равно суммѣ работъ внѣшнихъ силъ при движеніи относительно центра тяжести.

27. Кромѣ дѣйствія такъ называемыхъ внѣшнихъ силъ, тѣло можетъ получить еще нѣкоторое количество тепловой энергіи, сооб-

щаемой ему извнѣ, или же само можетъ потерять нѣкоторое количество этой энергіи, отдавая ее внѣшнимъ тѣламъ. Такой обмѣнъ тепловой энергіи совершается посредствомъ лучеиспусканія, или посредствомъ проводимости. Этотъ случай представляютъ себѣ такимъ образомъ: если тѣло находится въ молекулярномъ колебательномъ движеніи, то заключающійся въ немъ эфиръ тоже приходитъ въ движеніе, которое сообщается окружающему эфиру и распространяется въ немъ посредствомъ ряда волнъ. Самъ эфиръ не задерживаетъ колебаній, но служитъ только для передачи ихъ, а въ этомъ и состоитъ лучеиспусканіе теплоты.

Обратно, если тепловая волна встрѣчаетъ тѣло, то часть ея энергіи передается эфиру внутри этого тѣла и его молекулямъ, при чемъ онѣ начинаютъ колебаться, или же измѣняются ихъ колебанія, — тѣло принимаетъ въ себя извѣстное количество тепловой энергіи. Наконецъ, если молекуля тѣла находится въ колебаніи, то она сообщаетъ колебаніе сосѣднимъ молекулямъ, и движеніе распространяется все дальше и дальше. Въ этомъ случаѣ происходитъ сообщеніе тепловой энергіи посредствомъ проводимости. Вѣроятно, что эфиръ и въ этомъ случаѣ имѣетъ вліяніе; но это дѣло нерѣшенное.

28. Теперь мы положимъ, что извнѣ проникаетъ въ тѣло извѣстное количество тепловой энергіи Z, вслѣдствіе чего полная его энергія увеличивается, и уравненіе (21) будетъ:

$$\Delta U = \sum L \text{ ext.} + Z \tag{23}$$

Напротивъ того, предположимъ, что тѣло отдаетъ извѣстное количество Z' тепловой энергіи; тогда ясно, что работа внѣшнихъ силъ будетъ равна измѣненію полной энергіи тѣла, плюсъ количеству Z' отданной тепловой энергіи. Въ этомъ случаѣ уравненіе (21) будетъ:

$$\sum L \text{ ext.} = \Delta U + Z'$$

Но это послѣднее уравненіе сводится на предъидущее: оно простирается и на количество пріобрѣтенной тепловой энергіи, разсматривая его положительнымъ, и на отданное, разсматривая его отрицательнымъ. Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема XII. Въ каждой системѣ измѣненіе полной энергіи равно суммѣ работъ внѣшнихъ силъ, увеличенной или уменьшенной тепловою энергіею, полученною или отданною.

Эти же самыя разсужденія могутъ быть повторены, не разсматривая болѣе абсолютнаго движенія, а разсматривая движеніе относительно центра тяжести. Если отъ тѣла будетъ отнято или прибавлено къ нему количество тепловой энергіи Z, то внутренняя его энергія на столько же уменьшится или увеличится, и уравненіе (22) будетъ:

$$\Delta U_i = \sum L' \text{ ext.} + Z \tag{24}$$

Теорема XIII. Въ каждой системѣ при движеніи относительно центра тяжести измѣненіе внутренней энергіи равно суммѣ работъ внѣшнихъ силъ, увеличенной или уменьшенной тепловою энергіею, полученною или отданною.

Работа внѣшнихъ силъ давленія.

29. Внѣшнія силы обыкновенно состоятъ изъ силъ давленія, дѣйствующихъ нормально къ поверхности тѣла. Тѣло A испытываетъ отъ тѣла B давленіе P и дѣйствуетъ на него обратно съ силою — P, равною и противоположною. Ясно, что сумма работъ внѣшнихъ давленій, испытываемыхъ тѣломъ A, равна, но противоположна по знаку, суммѣ работъ силъ тѣла A, противодѣйствующихъ внѣшнимъ тѣламъ. Если назвать черезъ S сумму работъ силъ тѣла A, противодѣйствующихъ внѣшнимъ тѣламъ, то сумма работъ давленій, производимыхъ на него внѣшними тѣлами, будетъ $-S$. Поэтому уравненіе (23) обратится въ

$$\Delta U = Z - S \tag{25}$$

и теорему XII можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Измѣненіе полной энергіи тѣла равно тепловой энергіи, полученной или отданной имъ, умень-

шенной произведенною этимъ тѣломъ внѣшнею работою.

Эта самая теорема примѣняется и къ движенію относительно центра тяжести. Если означить чрезъ S' произведенную тѣломъ A внѣшнюю работу при такомъ относительномъ движеніи, то уравненіе (24) будетъ:

$$\Delta U_1 = Z - S' \tag{26}$$

и теорема XIII гласитъ:

Измѣненіе внутренней энергіи тѣла равно тепловой энергіи, пріобрѣтенной или отданной имъ, уменьшенной внѣшнею работою, которую тѣло произвело при движеніи относительно центра тяжести.

Если тѣло, послѣ ряда измѣненій, приходитъ въ тоже положеніе и состояніе, то его полная энергія имѣетъ тоже самое значеніе; поэтому $\Delta U = 0$, и уравненіе (25) сведется на

$$Z = S \tag{27}$$

При этомъ нужно различать два случая, т. е. будутъ ли величины Z и S положительныя, или отрицательныя. Въ первомъ случаѣ тѣло пріобрѣтаетъ тепловую энергію и производитъ равную ей внѣшнюю работу; во второмъ же — оно пріобрѣтаетъ внѣшнюю работу и отдаетъ равное ей количество тепловой энергіи. Оба эти случая соединяются въ одно слѣдствіе:

Слѣдствіе. Если тѣло возвращается въ прежнее свое состояніе, то пріобрѣтенная или отданная имъ тепловая энергія равна произведенной или пріобрѣтенной имъ внѣшней работѣ.

Тепловыя машины имѣютъ цѣлью переводить теплоту въ работу, или обратно — работу въ теплоту. Во всѣхъ этихъ машинахъ движеніе періодическое, и предъидущее уравненіе примѣнимо къ промежутку времени, равному всему періоду.

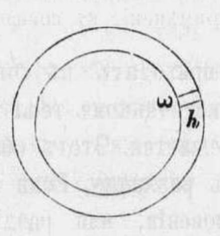
Внѣшняя работа въ случаѣ равномѣрнаго давленія.

30. Внѣшнія давленія очень часто заключаются въ равномѣрномъ давленіи, производимомъ на поверхность тѣла. Въ этомъ случаѣ внѣшнюю работу можно выразить очень просто, если не существуетъ видимаго движенія. Пусть v будетъ объемъ тѣла A, p — давленіе, испытываемое имъ на квадратный метръ, — тогда элементъ поверхности ω испытываетъ давленіе $p\omega$. Положимъ, что тѣло претерпѣваетъ безконечно малое измѣненіе въ объемѣ, и пусть h означаетъ часть нормали, лежащей между элементомъ ω и новою поверхностью тѣла. Работа противодѣйствія тѣла A внѣшнимъ тѣламъ есть $p\omega h$ для элемента поверхности ω; полная же работа dS, произведенная этимъ тѣломъ, будетъ

$$dS = \Sigma p\omega h = p\Sigma\omega h$$

Но ωh (фиг. 3) есть объемъ между элементомъ ω и соотвѣтствующимъ элементомъ новой поверхности; поэтому $\Sigma\omega h$ есть измѣненіе объема dv этого тѣла; слѣдовательно

Фиг. 3.



$$dS = pdv \tag{28}$$

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Термодинамика.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Разсматриваніе тепловыхъ явленій.

Опредѣленіе температуры. — Первое начало. — Опредѣленіе механическаго эквивалента теплоты.—Слѣдствіе изъ начала эквивалентности.—Интегральная функція. — Примѣненіе къ совершеннымъ газамъ.

31. Если два тѣла приходятъ въ соприкосновеніе, то вообще одно изъ нихъ служитъ источникомъ теплоты и охлаждается, между тѣмъ какъ другое—нагрѣвается. Этотъ обмѣнъ теплоты между тѣлами можетъ происходить различно. Если тѣла находятся въ непосредственномъ соприкосновеніи, или раздѣлены вѣсомыми тѣлами, принимающими участіе въ движеніи теплоты, то переходъ ея совершается посредствомъ проводимости. Напротивъ того, если нѣтъ промежуточныхъ тѣлъ, или межлежащія вѣсомыя тѣла не принимаютъ участія въ тепловомъ движеніи, то теплота распространяется посредствомъ лучеиспусканія. Наконецъ, переходъ теплоты можетъ совершаться одновременно посредствомъ проводимости и лучеиспусканія.

Если не дѣйствуетъ внѣшняя причина, то во всѣхъ случаяхъ оба тѣла приходятъ въ такое состояніе, которое и продолжаетъ существовать; при этомъ говорятъ, что тѣла находятся въ равновѣсіи температуръ или что они имѣютъ одну и туже температуру. Это состояніе есть состояніе подвижнаго равновѣсія температуръ, такъ какъ предполагается, что между обоими тѣлами существуетъ постоянно равный обмѣнъ теплоты.

Пока существуетъ равновѣсіе между двумя тѣлами, — оно не зависитъ отъ того положенія, которое имъ придаютъ; изъ этого слѣдуетъ заключить, что равновѣсіе температуръ есть вполнѣ опредѣленное состояніе, могущее существовать въ одномъ только извѣстномъ случаѣ.

Если два тѣла A и B находятся въ равновѣсіи температуръ съ третьимъ тѣломъ C, то опытъ показываетъ, что они и между собою будутъ въ равновѣсіи температуръ. Если два тѣла, взаимнодѣйствующія другъ на друга, не находятся въ равновѣсіи температуръ, то тò изъ нихъ, которое сообщаетъ другому бòльшее количество теплоты, имѣетъ и температуру болѣе высокую. Если тѣло A имѣетъ бòльшую температуру чѣмъ B, которое, въ свою очередь, находится въ равновѣсіи съ третьемъ тѣломъ C, то опытъ показываетъ, что температура A на столько же выше и температуры тѣла C. Предположимъ далѣе, что B имѣетъ высшую температуру, чѣмъ C, но не столь высокую, какъ тѣло A, и пусть A охлаждается до равновѣсія температуръ съ C; тогда увидимъ, что оно пройдетъ чрезъ температуру промежуточнаго тѣла B. Другими словами, если распредѣлить тѣла по дѣйствію ихъ теплоты, то можно устроть температурную скалу и, притомъ, только одну такую скалу.

Положимъ, что одно и тоже тѣло P приводится постепенно въ состояніе равновѣсія температуръ со всѣми тѣлами разсматриваемой скалы: оно пройдетъ цѣлый рядъ слѣдующихъ одно за другимъ состояній, которыя и будутъ служить обозначеніемъ различныхъ температуръ; а въ этомъ-то и заключается суть термометра.

32. Главная задача термодинамики — изслѣдованіе измѣненій однороднаго тѣла, имѣющаго при полномъ расширеніи однородную плотность или таковой же удѣльный объемъ (подъ удѣльнымъ объемомъ разумѣется объемъ единицы вѣса); кромѣ того, если

температура его t вездѣ одинакова, на всю поверхность дѣйствуетъ равномѣрное давленіе p и которое, наконецъ, не имѣетъ никакого видимаго движенія. При такихъ условіяхъ, состояніе тѣла зависитъ вообще отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ: отъ дѣйствительной его энергіи V и отъ потенціальной — W. Обыкновенно всѣ разсматриваемыя величины, характеризующія физическое состояніе тѣла, какъ-то: температура t, удѣльный объемъ v и давленіе p находятся въ зависимости отъ V и W; онѣ суть функціи этихъ двухъ величинъ и потому

$$t=f_1(V, W),\ v=f_2(V, W),\ p=f_3(V, W)$$

Такимъ образомъ получаются три уравненія между пятью величинами, изъ которыхъ любыя двѣ могутъ быть взяты за перемѣнныя независимыя. Обыкновенно выбираютъ v и p; въ такомъ случаѣ температура будетъ функціей объема и давленія.

Впрочемъ, въ извѣстныхъ случаяхъ нельзя выбирать перемѣнныя произвольно, потому что функціи претерпѣваютъ большія измѣненія при малыхъ измѣненіяхъ перемѣнныхъ. Напримѣръ, во время таянія льда, при постоянномъ давленіи, объемъ измѣняется мало впродолженіе явленія, между тѣмъ, какъ состояніе тѣла испытываетъ значительное измѣненіе. Въ такомъ случаѣ не раціонально брать v и p за перемѣнныя независимыя; затрудненіе устраняется, коль скоро взять за независимую перемѣнную потенціальную энергію W. Она и есть такая именно величина, которая претерпѣваетъ самыя большія измѣненія.

Опредѣленіе температуры.

33. Для каждаго однороднаго тѣла, находящагося въ вышесказанныхъ условіяхъ, существуетъ слѣдующее отношеніе между температурой, удѣльнымъ объемомъ и давленіемъ:

$$(1) \qquad \varphi(t, v, p)=0$$

Для каждаго, произвольно взятаго, тѣла еще не извѣстна форма такой функціи; законы же Гей-Люссака и Маріотта даютъ только весьма близкое выраженіе для постоянныхъ газовъ *). Однако, совершенно достаточно знать существованіе такого отношенія, чтобы съ помощью его опредѣлять температуры. — Разсмотримъ какое-нибудь тѣло, подверженное постоянному давленію; тогда для него

$$t=f(v)$$

Поэтому измѣненія объема тѣла, при постоянномъ давленіи, могутъ служить для раздѣленія температурной скалы, предполагая, что тѣло это не находится въ извѣстныхъ исключительныхъ обстоятельствахъ (какъ напримѣръ, измѣненіе состава) въ предѣлахъ температуръ, между которыми оно должно быть термометромъ; вслѣдствіе чего, для устройства термометра самое лучшее употреблять постоянный газъ. Раціональнѣе всего температурную скалу раздѣлять по измѣненіямъ объема единицы вѣса газа при опредѣленномъ давленіи. Пусть v_0 будетъ объемъ такой единицы вѣса при опредѣленной температурѣ, которую назовемъ нулемъ, v_1 — объемъ той же массы газа при другой извѣстной температурѣ t_1 и v — объемъ при какой-нибудь температурѣ t; тогда, принимая температуры пропорціональными измѣненіямъ объема, считая послѣднія отъ объема при 0 градусовъ, найдемъ:

$$\frac{t}{t_1}=\frac{v-v_0}{v_1-v_0}$$

Если положить $\alpha=\frac{v_1-v_0}{v_0\, t_1}$, то это уравненіе приметъ видъ:

$$v=v_0(1+\alpha t)$$

При чемъ α означаетъ коеффиціентъ расширенія газа.

34. Всѣ газы и перегрѣтые пары стремятся къ предѣльному состоянію, характеризуемому законами Маріотта и Гей-Люссака. Эти два закона суть:

---

*) Новѣйшіе опыты надъ упругостью газовъ читатель найдетъ въ сочиненіи Д. Менделѣева: «Объ упругости газовъ». С.-Петербургъ, 1875.

Примѣч. перевод.

1) Законъ Гей-Люссака. — Всѣ постоянные газы имѣютъ одинъ и тотъ же коеффиціентъ расширенія, и коеффиціентъ этотъ не зависитъ отъ давленія; онъ приблизительно равенъ $^1/_{273}$.

2) Законъ Маріотта.—Объемы одного и того же количества газа при одинаковой температурѣ обратно пропорціональны давленіямъ.

Если v означаетъ объемъ извѣстнаго количества газа при давленіи p, v' — объемъ его при давленіи p' и при той же самой температурѣ, то получимъ:

$$\frac{v}{v'} = \frac{p'}{p} \quad \text{или} \quad vp = v'p'$$

Эти два закона позволяютъ установить отношеніе между удѣльнымъ объемомъ, температурою и давленіемъ. Пусть v_o будетъ объемъ единицы вѣса газа при температурѣ нуль и при опредѣленномъ давленіи p_o, v — объемъ того же количества газа при температурѣ t и при давленіи p; далѣе, назовемъ посредствомъ v' объемъ газа при давленіи p_o и при температурѣ t;—тогда, по закону Гей-Люссака, $v' = v_o\ (1 + \alpha t)$ и по закону Маріотта— $vp = v'p_o$, при чемъ для искомаго отношенія между температурой, объемомъ и давленіемъ получимъ:

$$(2) \qquad vp = v_o\ p_o\ (1 + \alpha t)$$

Обѣ величины p_o и α — постоянны для всѣхъ газовъ. Если положимъ, что $a = \frac{1}{\alpha}$ $(a = 273)$, то вышеприведенное отношеніе приметъ видъ:

$$(3) \qquad vp = \alpha v_o\ p_o\ (a + t)$$

Первое начало.

35. При изслѣдованіяхъ, пріобрѣтенныя или отданныя количества теплоты измѣряются сравненіемъ ихъ съ другимъ количествомъ, принятымъ за единицу теплоты, которое опредѣляется переходомъ даннаго тѣла изъ одного извѣстнаго состоянія въ другое. За единицу теплоты принято количество ея, необходимое для возвышенія температуры одного килограмма воды отъ 0 до 1 градуса сотенной скалы, при давленіи въ 760 милиметровъ. Это количество теплоты называется калоріей (calorie).

Раньше мы назвали буквою Z извѣстное количество тепловой энергіи, которая, какъ живая сила, измѣряется посредствомъ обыкновенной единицы живыхъ силъ или работъ, т. е. посредствомъ килограммометра; поэтому, такое количество теплоты можетъ быть представлено или числомъ Q единицъ теплоты, или же числомъ Z килограммометровъ. Если назвать чрезъ E отношеніе единицы теплоты къ килограммометру, то, очевидно, получимъ: $Z = EQ$.

Отношеніе E называется механическимъ эквивалентомъ теплоты. Это есть то самое число килограммометровъ, которое соотвѣтствуетъ единицѣ теплоты. — Возьмемъ также обратное отношеніе: $A = \frac{1}{E}$; тогда $Q = AZ$.

Первое начало механической теоріи теплоты выражается уравненіемъ (23), которое мы вывели изъ теоремы живыхъ силъ (n^o28). Теперь его можно привести къ общему виду:

$$(4) \qquad \Delta U = \sum L \text{ ext.} + EQ$$

Это уравненіе примѣнимо какъ къ абсолютному движенію, такъ и къ движенію относительно центра тяжести.

Мы уже сказали въ n^o29, что внѣшнія силы обыкновенно заключаются въ силахъ давленія, дѣйствующихъ нормально къ поверхности тѣла.

Если назвать S сумму работъ силъ разсматриваемаго тѣла, противодѣйствующихъ внѣшнимъ тѣламъ, то сумма работъ внѣшнихъ силъ будетъ—S, а вышенаписанное уравненіе обратится въ

$$(5) \qquad EQ = \Delta U + S$$

изъ чего слѣдуетъ, что

$$Q = A\ (\Delta U + S)$$

Это уравненіе показываетъ, что пріобрѣтенное или отданное тѣломъ количество теплоты эквивалентно измѣненію полной его энергіи (полной или внутренней энергіи, смотря по тому, совершается ли абсолютное движеніе, или движеніе относительно центра тяжести), плюсъ внѣшней работѣ, произведенной тѣломъ.

Если тѣло вновь возвращается къ своему исходному состоянію, то измѣненіе энергіи ΔU равно нулю, и предъидущее уравненіе сведется на

$$EQ = S \tag{6}$$

Тогда пріобрѣтенное или отданное тѣломъ количество теплоты эквивалентно внѣшней работѣ, произведенной или полученной этимъ тѣломъ.

Успѣхъ теоріи начинается, главнымъ образомъ, съ того времени, когда стало ясно понятіе объ эквивалентности количества теплоты и живой силы или работы. Опредѣленіе числоваго значенія отношенія E между единицею теплоты и килограммометромъ имѣетъ большую важность въ различныхъ приложеніяхъ. Многіе физики старались опредѣлить его; мы приведемъ только важнѣйшія работы.

Опредѣленіе механическаго эквивалента теплоты.

36. Джулю принадлежатъ замѣчательнѣйшія изслѣдованія о треніи. При этихъ опытахъ употреблялась извѣстная внѣшняя работа для приведенія во взаимное треніе двухъ тѣлъ и для возбужденія опредѣленнаго количества теплоты, которое измѣрялось съ помощью калориметра. Одинъ изъ употребленныхъ Джулемъ аппаратовъ былъ весь сдѣланъ изъ латуни [1]). Онъ состоитъ изъ сосуда для измѣренія теплоты, наполненнаго водою, и въ которомъ вращается вертикальная ось съ прикрѣпленными къ ней 16-ю вертикальными же металлическими планками; эти послѣднія проходятъ чрезъ рядъ промежутковъ, образовавшихся между прикрѣпленными къ стѣнкамъ калориметра выдающимися пластинками, чрезъ что увеличивается треніе жидкости какъ о самую себя, такъ и о металлическія части. На оси вращенія, внѣ сосуда, укрѣпленъ цилиндръ съ навитыми на него двумя снурками, изъ которыхъ каждый ведетъ къ блоку, приводимому въ движеніе паденіемъ груза.

[1]) Joule, Philosophical Transactions for the year 1850. Pogg. Ann. Ergänz. B. IV. *).

*) «Краткій курсъ физики» Жамена, переводъ Н. К. Гутковскаго, т. I, стр. 114, 1874 года. *Примѣч. перев.*

Пусть температура въ калориметрѣ при началѣ опыта будетъ извѣстна; затѣмъ заставляютъ падать движущіе грузы и измѣряютъ происшедшее вслѣдствіе этого нагрѣваніе. Чтобы опредѣлить внѣшнюю работу, перешедшую въ теплоту, нужно изъ работы, произведенной паденіемъ грузовъ, вычесть живую силу, пріобрѣтенную ими въ концѣ опыта, и работу потерянную вслѣдствіе жесткости снурковъ и тренія частей внѣ калориметра. Для измѣренія этой послѣдней цилиндръ отдѣляютъ отъ вала и наматываютъ оба снурка въ противоположномъ направленіи; тогда аппаратъ будетъ въ равновѣсіи. Посредствомъ опыта опредѣляютъ тотъ добавокъ груза, который нужно заставить дѣйствовать на одинъ изъ блоковъ, чтобы аппаратъ пріобрѣлъ равномѣрное движеніе съ такою же скоростью, какъ и въ началѣ опыта. Этотъ излишекъ груза будетъ уравновѣшиваться внѣшними сопротивленіями, и, слѣдовательно, можно вычислить, какъ велика была при этихъ опытахъ пріобрѣтенная работа.

Что касается произведенной теплоты, то она состоитъ, во-первыхъ, изъ той, вслѣдствіе которой калориметръ нагрѣлся, и которую легко вычислить изъ повышенія температуры, и, во-вторыхъ, изъ той, которая перешла въ окружающіе предметы. Эта послѣдняя очень мала и вычисляется только приблизительно. Такимъ образомъ получаются всѣ необходимыя данныя для вычисленія механическаго эквивалента теплоты.

Въ настоящемъ случаѣ имѣетъ мѣсто выдѣленіе теплоты или теплорода, поэтому Q—отрицательное. Если положить $Q = -Q'$, то уравненіе (4) будетъ:

$$L\ \mathrm{ext} = \Delta U + EQ'.$$

Въ опытахъ Джуля трущіяся тѣла были или жидкости. или очень крѣпкія твердыя тѣла, не подвергавшіяся во время операціи замѣтной порчѣ. Вѣсъ жидкости, заключавшейся въ калориметрѣ, былъ достаточно великъ, вслѣдствіе чего повышеніе температуры было весьма незначительно, и, наконецъ, присутствіе въ ней твердыхъ пластинокъ отнимало у нея возможность пріобрѣсти въ концѣ опыта значительную живую силу. Изъ этого слѣдуетъ, что измѣненіемъ энергіи ΔU трущихся тѣлъ, въ отношеніи отданнаго при треніи и пріобрѣтеннаго калориметромъ количества теплоты, можно совершенно пренебречь и, слѣдовательно, съ достаточною точностью написать:

$$L \text{ ext} = EQ'$$

Внѣшняя работа выражается въ килограммометрахъ, а отданное количество теплоты Q' измѣряется калоріями; отношеніе между ними и есть искомый эквивалентъ E.

Въ другихъ опытахъ Джуль пользовался желѣзнымъ калориметромъ той же формы, какъ описанный, и въ которомъ онъ употреблялъ ртуть. Кромѣ того, онъ замѣнилъ ось съ лопатками коническимъ кольцомъ изъ чугуна, которое терлось о конусъ изъ того же вещества среди массы ртути. Этими пріемами онъ достигъ слѣдующихъ результатовъ:

при треніи воды о самую себя и о латунь . . . 424,9

при треніи ртути о самую себя и о желѣзо. . . { 425 ; 426,3

при треніи чугуна о самого себя въ ртути. . . { 426,7 ; 425,6.

Эти результаты показываютъ замѣчательное согласіе. Средняя величина равняется 425, и это число принято вообще за значеніе механическаго эквивалента теплоты *).

*) Ясное понятіе о затруднительности этихъ опытовъ можно составить изъ разсматриванія тѣхъ цифръ, которыя помѣщены на 52 стр. сочиненія Тиндаля: «Теплота, разсматриваемая какъ родъ движенія», переводъ подъ редакціей А. П. Шимкова, 1864 года. *Примѣч. перев.*

37. Обратный путь избралъ Гирнъ [1]). Онъ пробовалъ измѣрять работу, произведенную паровою машиною съ конденсаціей при затратѣ извѣстнаго количества теплоты. Въ этомъ случаѣ топильное пространство сообщаетъ пару опредѣленное количество теплоты Q_2, которое, по изслѣдованіямъ Реньо, можно вычислить, наблюдая температуру пара при входѣ въ цилиндръ. Часть Q_1 этой теплоты поглощается холодною водою конденсатора или разсѣевается въ окружающіе предметы, и только разность ихъ $Q_2 - Q_1$ переходитъ въ работу. Единственныя внѣшнія силы, которыя при этомъ вводятся въ вычисленіе, суть нормальныя силы давленія (n^o29). Гирнъ вычислялъ внѣшнюю работу S, произведенную машиною въ весьма малые промежутки времени, опредѣливъ съ помощью индикатора Уатта упругость паровъ въ цилиндрѣ. Обѣ эти данныя достаточны для вычисленія механическаго эквивалента теплоты. Такъ какъ движеніе машины періодическое, то измѣненіе внутренней энергіи ΔU, послѣ цѣлаго ряда періодовъ, будетъ равно нулю, и получится отношеніе

$$S = EQ = E\ (Q_2 - Q_1)$$

внѣшней работы къ затраченной теплотѣ (n^o35).

Конечно, пріемъ этотъ не имѣетъ той степени точности, какъ способъ Джуля, потому что внѣшнюю работу опредѣлить весьма трудно, а количество теплоты $Q_2 - Q_1$, введенное въ вычисленіе, очень мало, сравнительно съ тѣмъ, которое слѣдуетъ измѣрить. Кромѣ того, при этомъ встрѣчается большое число различныхъ обстоятельствъ, которыя легко могутъ ввести въ заблужденіе, и вычислить которыя съ точностью не возможно.

Найденныя Гирномъ числа колеблются между 300 и 600; средняя же величина—415. Эти выводы, конечно, мало согласуются съ предъидущими; но если сообразить, что опыты производились при весьма различныхъ обстоятельствахъ, что причины ошибокъ измѣня-

[1]) Hirn, Recherches sur l'èquivalent mécanique de la chaleur présenté à la société de physique de Berlin. Paris, 1858. Clausius, Bericht über die Untersuchungen von Hirn. Fortschritte der Physik im Jahre 1855. Berlin, 1858.

лись съ каждымъ разомъ, что взятыя для опытовъ машины были совершенно различнаго устройства и силъ, а также принимая во вниманіе всѣ затрудненія, встрѣчающіяся вообще при такихъ экспериментахъ, то опыты Гирна слѣдуетъ считать за весьма существенное подтвержденіе работъ Джуля *).

Слѣдствіе изъ перваго начала.

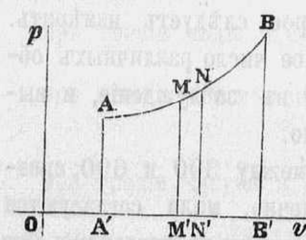
38. Разсмотримъ теперь однородное тѣло безъ видимаго движенія, вся поверхность котораго подвержена равномѣрному давленію. Состояніе тѣла характеризуется тремя величинами: температурой t, удѣльнымъ объемомъ v и давленіемъ p. Такъ какъ между этими тремя величинами существуетъ отношеніе (n^o33)

$$\varphi(t,\ v,\ p) = 0$$

то двухъ изъ нихъ достаточно для опредѣленія состоянія тѣла. Предварительно мы будемъ опредѣлять его съ помощью двухъ перемѣнныхъ независимыхъ v и p.

Геометрическое представленіе дастъ возможность легче слѣдить за нашими заключеніями. Построимъ въ плоскости двѣ взаимно перпендикулярныя оси $0v$ и $0p$ (фиг. 4) и будемъ разсматривать точку M, абсцисса которой $0M'$ равна v, а ордината MM' равна p. При этомъ положеніе точки M на плоскости опредѣляетъ состояніе тѣла. Если оно перейдетъ изъ состоянія A въ B, то рядъ измѣненій состоянія представится линіей AMB.

Фиг. 4.



Площадь $ABB'A'$ представляетъ собою внѣшнюю работу S, произведенную тѣломъ. Но такъ какъ

*) Долгъ справедливости заставляетъ насъ указать и на методъ Майера, который первый вывелъ величину механическаго эквивалента теплоты чисто теоретическимъ путемъ. Объ этомъ можно найти въ „Основаніяхъ термохиміи» Науманна, перев. К. Лисенко, стр. 22. С.-Петербургъ, 1871 г.

Примѣч. перев.

тѣло не имѣетъ видимаго движенія, а подвержено только равномѣрному давленію, то, какъ мы видѣли (n^o30), внѣшняя работа, соотвѣтствующая безконечно малому измѣненію состоянія MN, выразится формулой: $ds = pdv$ и, слѣдовательно, она равна маленькой площадкѣ $MNN'M'$. Такимъ образомъ внѣшняя работа, произведенная тѣломъ при переходѣ изъ состоянія A въ B, выразится площадью $ABB'A'$. Она зависитъ не только отъ конечныхъ состояній A и B, но, кромѣ того, и отъ ряда промежуточныхъ состояній, т. е. отъ рода и способа, по какимъ совершались измѣненія, или отъ вида кривой.

Предположимъ, что тѣло выходитъ изъ извѣстнаго начальнаго состоянія A и достигаетъ какого нибудь состоянія M, опредѣляемаго перемѣнными независимыми v и p. Такъ какъ внѣшняя работа S зависитъ отъ ряда измѣненій пройденныхъ состояній, то она не можетъ быть разсматриваема какъ функція двухъ перемѣнныхъ v и p, опредѣляющихъ состояніе M. Напротивъ того, ясно, что только одна внутренняя энергія U зависитъ единственно отъ дѣйствительнаго состоянія тѣла и, слѣдовательно, она есть вполнѣ опредѣленная функція отъ v и p. Поэтому измѣненіе $\Delta U = U - U_0$, полученное ею при переходѣ изъ начальнаго состоянія A въ какое нибудь M, будетъ также функціей отъ v и p.

По основному уравненію (n^o35)

$$Q = A\ (\Delta U + S)$$

количество теплоты Q равно суммѣ двухъ величинъ, изъ которыхъ одна $A\Delta U$ не зависитъ отъ ряда измѣненій состоянія, а другая, напротивъ того, зависитъ отъ него. Поэтому послѣдняя величина не есть функція отъ v и p.

Если примѣнить вышенаписанное уравненіе къ безконечно малому измѣненію и вмѣсто ds поставить pdv, то получится отношеніе:

$$(a) \qquad dQ = A(dU + pdv)$$

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что dU есть полный дифференціалъ функціи двухъ перемѣнныхъ независимыхъ; но этого нельзя сказать о dQ. Впослѣдствіи мы часто будемъ пользоваться отношеніемъ (a), какъ выраженіемъ перваго начала разсмотрѣнныхъ движеній.

39. Въ предъидущемъ мы взяли v и p за перемѣнныя независимыя для опредѣленія состоянія тѣла, при чемъ U есть функція обѣихъ перемѣнныхъ; назовемъ ее Uvp, изображая перемѣнныя независимыя въ видѣ значковъ, для устраненія всякихъ недоразумѣній. Если dU замѣнить его значеніемъ

$$dU = \frac{dUvp}{dv}\,dv + \frac{dUvp}{dp}\,dp$$

то уравненіе (a) будетъ:

$$dQ = A\left(\frac{dUvp}{dv} + p\right)dv + A\,\frac{dUvp}{dp}\,dp$$

Если положить для сокращенія

$$X = A\left(\frac{dUvp}{dv} + p\right),\quad Y = A\,\frac{dUvp}{dp}$$

гдѣ X и Y двѣ функціи отъ v и p, то предъидущее уравненіе приведется къ такому простому виду:

$$(a_1)\qquad dQ = Xdv + Ydp$$

Между этими двумя функціями, X и Y, существуетъ отношеніе, а именно:

$$\frac{dX}{dp} = A\,\frac{d^2U}{dvdp} + A$$

$$\frac{dY}{dv} = A\,\frac{d^2U}{dpdv}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$(\alpha_1)\qquad \frac{dX}{dp} - \frac{dY}{dv} = A$$

Это отношеніе показываетъ достаточно ясно, что правая часть уравненія (α_1) не есть полный дифференціалъ, потому что въ такомъ случаѣ должно было бы быть: $\frac{dX}{dp} = \frac{dY}{dv}$ и, слѣдовательно, $A = 0$.

40. Возьмемъ теперь t и v за перемѣнныя независимыя; тогда U будетъ функціей отъ t и v; p—также функція этихъ перемѣнныхъ, вслѣдствіе отношенія $\varphi(t, v, p) = 0$; поэтому

$$dU = \frac{dUtv}{dt}\,dt + \frac{dUtv}{dv}\,dv$$

и уравненіе (a) будетъ:

$$dQ = A\,\frac{dUtv}{dt}\,dt + A\left(\frac{dUtv}{dv} + p\right)dv$$

Если положимъ, что

$$c = A\,\frac{dUtv}{dt},\quad l = A\left(\frac{dUtv}{dv} + p\right)$$

гдѣ c и l — функціи отъ t и v, то это уравненіе сведется на

$$(a_2)\qquad dQ = cdt + ldv$$

Обѣ функціи c и l имѣютъ важное физическое значеніе: c есть теплоемкость тѣла при постоянномъ объемѣ, а l — скрытая теплота расширенія. Въ самомъ дѣлѣ, если объемъ не измѣняется, то $dv = 0$, и предъидущее уравненіе будетъ:

$$dQ = cdt$$

Если сообщить тѣлу количество теплоты ΔQ, при чемъ объемъ его не измѣнится, то температура повысится на Δt. Теплоемкость равна предѣльному значенію отношенія $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, т. е. она равна c. Напротивъ того, если температура останется постоянною, то уравненіе будетъ:

$$dQ = ldv$$

l есть предѣльное значеніе отношенія $\frac{\Delta Q}{\Delta v}$ между полученною тѣломъ теплотою и соотвѣтствующимъ увеличеніемъ объема. Это и есть скрытая теплота расширенія. Если отъ полученной теплоты

тѣло сожмется, то Δv и l будутъ отрицательными. Между функціями c и l существуетъ отношеніе, а именно:

$$\frac{dc}{dv} = A\frac{d^2U}{dtdv}$$

$$\frac{dl}{dt} = A\frac{d^2U}{dvdt} + A\frac{dp}{dt}$$

и, слѣдовательно,

$$(\alpha_2) \qquad \frac{dl}{dt} - \frac{dc}{dv} = A\frac{dp}{dt}$$

41. Возьмемъ, наконецъ, t и p за перемѣнныя независимыя; тогда U и v должны быть разсматриваемы функціями отъ t и p. И такъ, получимъ:

$$dU = \frac{dUtp}{dt}dt + \frac{dUtp}{dp}dp$$

$$dv = \frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{dp}dp$$

$$dQ = A\left(\frac{dUtp}{dt} + p\frac{dv}{dt}\right)dt + A\left(\frac{dUtp}{dp} + p\frac{dv}{dp}\right)dp$$

и если положить

$$C = A\left(\frac{dUtp}{dt} + p\frac{dv}{dt}\right)$$

$$h = A\left(\frac{dUtp}{dp} + p\frac{dv}{dp}\right)$$

гдѣ C и h означаютъ функціи отъ t и p, то уравненіе (a) приметъ третью форму:

$$(a_3) \qquad dQ = Cdt + hdp$$

Функція C есть теплоемкость при постоянномъ давленіи, потому что она есть предѣльное значеніе отношенія $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, если давленіе не измѣняется.

C и h также связаны между собою отношеніемъ, а именно:

$$\frac{dh}{dt} = A\left(\frac{d^2U}{dpdt} + p\frac{d^2v}{dpdt}\right)$$

$$\frac{dC}{dp} = A\left(\frac{d^2U}{dtdp} + p\frac{d^2v}{dtdp} + \frac{dv}{dt}\right)$$

и, слѣдовательно,

$$(\alpha_3) \qquad \frac{dh}{dt} - \frac{dC}{dp} = -A\frac{dv}{dt}$$

Формы (a_1), (a_2), (a_3), которыя мы придавали основному уравненію (a), соотвѣтствуютъ тремъ парамъ перемѣнныхъ независимыхъ: v и p, v и t, t и p.

Три отношенія (α_1), (α_2), (α_3) между ними были найдены Клаузіусомъ.

Интегральная функція [1]).

42. Мы видѣли (n^0 39), что если принять за перемѣнныя независимыя v и p, то основное уравненіе приведется къ виду:

$$(a_1) \qquad dQ = Xdv + Ydp$$

Мы знаемъ, что правая часть не есть полный дефференціалъ функціи отъ v и p. Однако же въ интегральномъ исчисленіи доказывается, что выраженіе подобной формы можетъ быть сдѣлано полнымъ дифференціаломъ, отъ умноженія его на извѣстную функцію *). Я напомню, въ нѣсколькихъ словахъ, доказательство этого предложенія. Разсмотримъ дифференціальное уравненіе

$$Xdv + Ydp = 0.$$

---

[1]) Подъ интегральной функціей мы разумѣемъ здѣсь обратную величину интегральнаго множителя; поэтому, его можно было бы назвать интегральнымъ дѣлителемъ, что̀ и сдѣлалъ уже Цейнеръ.

*) Это доказательство можно найти во II томѣ «Курса анализа» Штурма, стр. 67, перев. В. Синцова, 1868 года. *Примѣч. переводч.*

Здѣсь обѣ перемѣнныя v и p суть функціи одна другой, и это уравненіе имѣетъ общій интегралъ. Примемъ его за извѣстный и приведемъ къ виду:

$$F(v, p) = \mu$$

гдѣ μ означаетъ произвольную постоянную. Отсюда слѣдуетъ, что

$$F'_v\, dv + F'_p\, dp = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dv} = -\frac{F'_v}{F'_p}$$

Это значеніе $\frac{dp}{dv}$ должно быть то же самое, какое даетъ дифференціальное уравненіе, слѣдовательно

$$\frac{X}{Y} = \frac{F_v'}{F_p'}$$

Далѣе, это уравненіе должно быть тожественно, т. е. оно должно удовлетворяться любыми значеніями v и p; поэтому

$$\frac{X}{F_v'} = \frac{Y}{F_p'} = \lambda$$

гдѣ λ — извѣстная функція отъ v и p. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{X}{\lambda} = F_v', \quad \frac{Y}{\lambda} = F_p'$$

Если теперь раздѣлить обѣ части уравненія (a_1) на λ, то

$$\frac{dQ}{\lambda} = \frac{X}{\lambda} dv + \frac{Y}{\lambda} dp$$

или

$$\frac{dQ}{\lambda} = F_v'\, dv + F_p'\, dp$$

Второй членъ есть полный дифференціалъ функціи $F(v, p)$. Означимъ эту функцію посредствомъ μ, тогда

$$(7) \qquad \frac{dQ}{\lambda} = d\mu$$

λ и μ суть двѣ новыя функціи независимыхъ перемѣнныхъ v и p. Очевидно, это же разсужденіе мы можемъ повторить, какія бы величины ни выбрали за независимыя.

Отсюда слѣдуетъ предложеніе: существуетъ такого рода функція λ между двумя перемѣнными независимыми, что выраженіе $\frac{dQ}{\lambda}$ обращается въ полный дифференціалъ.

43. Существуетъ даже безконечное число функцій, обладающихъ тѣмъ же свойствомъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть λ_1 будетъ одна изъ нихъ, тогда

$$\frac{dQ}{\lambda_1} = d\mu$$

Если положимъ

$$\lambda = \lambda_1\, \varphi(\mu)$$

гдѣ $\varphi(\mu)$ есть произвольная функція μ, то получимъ:

$$\frac{dQ}{\lambda} = \frac{\lambda_1\, d\mu}{\lambda_1 \varphi(\mu)} = \frac{d\mu}{\varphi(\mu)}$$

Очевидно, правая часть есть полный дифференціалъ извѣстной функціи $\psi(\mu)$, которая опредѣляется изъ

$$\psi(\mu) = \int \frac{d\mu}{\varphi(\mu)}$$

Такимъ образомъ получаемъ предложеніе: если извѣстна функція λ независимыхъ перемѣнныхъ, приводящая выраженіе $\frac{dQ}{\lambda}$ къ полному дифференціалу, то получится новая функція, обладающая тѣмъ же свойствомъ, если умножимъ первую на произвольную функцію отъ μ.

Приложеніе къ совершеннымъ газамъ.

44. Совершеннымъ газомъ называется газъ, строго подчиняющійся опытнымъ законамъ, которые къ обыкновеннымъ прилагаются только весьма приблизительно. Еще не извѣстенъ ни одинъ газъ, обладающій этимъ свойствомъ съ абсолютною точностью; однако, слѣдствія, получаемыя изъ разсматриванія ихъ совершенными, чрезвычайно близко подходятъ къ результатамъ дѣйствительныхъ газовъ.

Первый опытный законъ. Законы Маріотта и Гей-Люссака. Оба эти закона, какъ мы видѣли ($n^o 34$), заключаются въ слѣдующемъ уравненіи:

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$$

или

$$pv = \alpha p_0 v_0 \; (a + t) \qquad (3)$$

Въ этомъ уравненіи предполагается, что температура измѣрена посредствомъ воздушнаго термометра. Величины α и p_0 суть постоянныя для всѣхъ газовъ; постоянная же v_0—особая величина для каждаго газа. Она есть удѣльный объемъ ихъ при температурѣ нуль и при давленіи p_0. Въ дѣйствительности постоянная α не абсолютно одна и та же для всѣхъ газовъ; незначительныя же разности указываютъ на существованіе общаго закона, подвергающагося весьма малымъ измѣненіямъ [1]).

Значенія $a = \dfrac{1}{\alpha}$ суть:

для воздуха. . . 273,20
для водорода . . 273,13
для углекислоты. 273,81

45. Второй опытный законъ. Законъ Джуля. Джуль вывелъ изъ своихъ изслѣдованій надъ расширеніемъ газовъ,

[1]) Regnault, Pogg. Ann. Bd. LVII *).

*) О самой общей формулѣ, выражающей свойства совершенныхъ газовъ, читатель найдетъ въ сочиненіи Д. Менделѣева: «Объ упругости газовъ», часть I, стр. 40. С.-Петербургъ, 1875 г. *Примѣч. перев.*

что внутренняя энергія ихъ зависитъ исключительно отъ температуры, но не отъ объема. Принимая этотъ законъ, мы можемъ положить, что

$$U = f\,(t)$$

Изъ этой гипотезы вытекаютъ многія важныя слѣдствія.

Первое слѣдствіе. Переходя къ общему значенію теплоемкости при постоянномъ объемѣ ($n^o 40$), получимъ:

$$c = A\,\frac{dU}{dt} \qquad (8)$$

Правая часть этого уравненія есть исключительно функція отъ t, и мы такимъ образомъ получимъ предложеніе:

Теплоемкость газа при постоянномъ объемѣ зависитъ единственно отъ его температуры.

Второе слѣдствіе. Для теплоемкости при постоянномъ давленіи имѣемъ ($n^o 41$):

$$C = A\left(\frac{dU}{dt} + p\,\frac{dv}{dt}\right)$$

Для газовъ намъ извѣстно отношеніе (3) между объемомъ, температурой и давленіемъ, слѣдовательно

$$v = \frac{1}{p}\,\alpha v_0\, p_0\,(a + t), \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha v_0\, p_0}{p}$$

а потому

$$C = A\left(\frac{dU}{dt} + \alpha v_0\, p_0\right) \qquad (9)$$

Теплоемкость газа при постоянномъ давленіи есть также функція одной только его температуры.

46. Третье слѣдствіе. Вычтя c изъ C, получимъ отношеніе:

$$C - c = A\alpha p_0 v_0 \qquad (10)$$

т. е. избытокъ теплоемкости при постоянномъ давленіи надъ тепло-

емкостью при постоянномъ объемѣ есть постоянное число для каждаго газа. Далѣе, изъ этого слѣдуетъ, что

$$(11) \qquad \frac{C-c}{v_0} = A\alpha p.$$

Это уравненіе показываетъ, что **отношеніе разностей теплоемкостей къ единицѣ объема для всѣхъ газовъ равно одной и той же постоянной величинѣ.**

Эта формула можетъ служить для опредѣленія механическаго эквивалента теплоты, а именно:

$$(12) \qquad E = \frac{1}{A} = \frac{\alpha p_0 v_0}{C-c}$$

Теплоемкость C при постоянномъ давленіи опредѣлена непосредственно изъ опытовъ; теплоемкость же c при постоянномъ объемѣ — косвенно, посредствомъ скорости звука въ газахъ *). Такимъ образомъ правая часть уравненія вполнѣ извѣстна.

Этимъ способомъ докторъ Майеръ [1]) вывелъ первое приблизительное опредѣленіе механическаго эквивалента теплоты. Примѣняя къ различнымъ газамъ числа, полученныя изъ самыхъ точныхъ опытовъ, онъ нашелъ для него слѣдующія значенія:

для воздуха. . $E = 426{,}0$
для кислорода $E = 425{,}7$
для азота. . . $E = 431{,}3$
для водорода $E = 425{,}3$

Напротивъ того, въ настоящее время предъидущее уравненіе служитъ для опредѣленія значенія c.

---

*) Объ этомъ читатель найдетъ въ «Курсѣ наблюдательной физики» Ѳ. Петрушевскаго, т. II, стр. 129, С.-Петербургъ, 1874 г. и въ «Полномъ курсѣ физики по сочиненіямъ Жамена и Вюльнера», составленномъ Н. Филипповымъ и Д. Аверкіевымъ, т. II, стр. 436 и проч. С.-Петербургъ, 1866 г. *Примѣч. перев.*

[1]) Mayer, Ann. d. Chemie von Liebig und Wöhler. 1842, Bd. XLII.

47. Четвертое слѣдствіе. Такъ какъ $\frac{dU}{dv} = 0$, то выраженіе для скрытой теплоты l расширенія газовъ ($n^0 40$) перейдетъ въ

$$(13) \qquad l = Ap$$

Скрытая теплота расширенія пропорціональна давленію.

Наконецъ, имѣемъ еще ($n^0 41$):

$$h = Ap\frac{dv}{dp}$$

Но изъ уравненія $v = \frac{1}{p}\alpha p_0 v_0 (a+t)$ выходитъ, что

$$\frac{dv}{dp} = -\frac{\alpha p_0 v_0 (a+t)}{p^2} = -\frac{v}{p}$$

Затѣмъ слѣдуетъ очень простое отношеніе:

$$(14) \qquad h = -Av$$

48. Пятое слѣдствіе. Для совершенныхъ газовъ весьма легко опредѣлить интегральную функцію λ. Если принять t и v за перемѣнныя независимыя, то получимъ:

$$dQ = cdt + ldv$$

Замѣняя же l его значеніемъ Ap, найдемъ:

$$dQ = cdt + Apdv$$

Если замѣнимъ p его значеніемъ изъ уравненія (3), то

$$dQ = cdt + A\alpha p_0 v_0 (a+t)\frac{dv}{v}$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$\frac{dQ}{a+t} = \frac{c}{a+t}dt + A\alpha p_0 v_0 \frac{dv}{v}$$

Правая часть, очевидно, есть полный дифференціалъ, потому что c есть функція одного только t ($n^0 45$) и перемѣнныя отдѣлены; она

есть дифференціалъ извѣстной функціи μ отъ t и v; слѣдовательно можно написать:

$$\frac{dQ}{a+t}=d\mu.$$

И такъ, одно изъ значеній функціи λ будетъ

$$\lambda=a+t \tag{15}$$

Если же взять за перемѣнныя независимыя t и p, то

$$dQ=C\,dt+h\,dp$$

или, по уравненію (14),

$$dQ=Cdt-Avdp$$

Замѣнимъ v его значеніемъ изъ уравненія (3); тогда

$$dQ=Cdt-A\alpha p_0v_0(a+t)\frac{dp}{p}$$

изъ чего слѣдуетъ, что

$$\frac{dQ}{a+t}=\frac{C}{a+t}\,dt-A\alpha p_0v_0\frac{dp}{p}$$

Такъ какъ C есть функція одного только t ($n^0 45$), то правая часть будетъ полнымъ дифференціаломъ извѣстной функціи отъ t и p; поэтому для λ найдемъ то же значеніе $a+t$, какъ и прежде. Тотъ же результатъ получится, если взять за перемѣнныя независимыя p и v. Такимъ образомъ является предложеніе:

Для совершенныхъ газовъ существуетъ такое значеніе функціи λ, которое зависитъ отъ одной только температуры.

49. Третій опытный законъ. Мы вывели изъ закона Джуля, что теплоемкость C при постоянномъ давленіи можетъ зависѣть только отъ температуры. Но опытъ показываетъ, что эта теплоемкость C не зависитъ отъ температуры и что она для каждаго газа есть постоянная величина. Если мы примемъ также и этотъ законъ, то, слѣдовательно (такъ какъ разность $C-c$ постоянна для каждаго газа, какъ видѣли уже выше въ $n^0 46$), теплоемкость при постоянномъ объемѣ имѣетъ также постоянное значеніе для каждаго газа.

50. Это предложеніе даетъ намъ возможность опредѣлить форму функціи μ.

Принявъ t и v за перемѣнныя независимыя, получимъ:

$$\frac{dQ}{a+t}=c\frac{dt}{a+t}+(C-c)\frac{dv}{v}$$

Такъ какъ C и c—постоянныя величины, то общій интегралъ правой части будетъ:

$$\mu=\log\left[B\,(a+t)^c\,v^{C-c}\right]$$

или же, замѣняя $a+t$ его значеніемъ изъ уравненія (3),—

$$\mu=\log\frac{B}{(\alpha p_0v_0)^c}\,p^cv^C$$

Такъ какъ B есть величина произвольная, то положимъ, что

$$\frac{B}{(\alpha p_0v_0)^c}=1$$

тогда

$$\mu=\log\,(p^cv^C) \tag{16}$$

Взявъ t и p за перемѣнныя независимыя, получимъ:

$$\frac{dQ}{a+t}=C\frac{dt}{a+t}-(C-c)\frac{dp}{p}$$

Интегралъ правой части есть

$$\mu=\log\frac{B'(a+t)^C}{p^{C-c}}=\log\frac{B'p^cv^C}{(\alpha p_0v_0)^C}$$

или, выбравъ приличную постоянную B',—

$$\mu=\log\,(p^cv^C)$$

Того же результата достигнемъ, принимая за независимыя перемѣнныя v и p. Поэтому для совершенныхъ газовъ

$$\text{(17)} \qquad \frac{dQ}{a+t} = d\log\left(p^c v^C\right)$$

Если газъ получаетъ какое нибудь измѣненіе, не отдавая и не пріобрѣтая теплоты ни при какой перемѣнѣ состоянія, то лѣвая часть постоянно будетъ равна нулю, а, слѣдовательно, въ правой—произведеніе $p^c v^C$ останется неизмѣннымъ. Это законъ Пуассона [1]).

51. Опредѣлимъ еще внутреннюю энергію газа. По (n^o45)

$$c = A\frac{dU}{dt} \text{ или } \frac{dU}{dt} = \frac{1}{A}c = Ec$$

Такъ какъ c—постоянная, то, слѣдовательно,

$$U = U_0 + Ec(t - t_0)$$

гдѣ U_0 показываетъ значеніе U при температурѣ t_0. И такъ, измѣненіе внутренней энергіи U газа пропорціонально измѣненію температуры, измѣренной воздушнымъ термометромъ. Такимъ образомъ внутренняя энергія можетъ служить измѣреніемъ температуры.

52. Четвертый опытный законъ. Далѣе, опытъ показываетъ также, что отношеніе $\frac{C}{v_0}$, т. е. отношеніе теплоемкости при постоянномъ давленіи газа къ единицѣ его объема есть постоянная величина для всѣхъ газовъ.

Мы уже видѣли (n^o46), что отношеніе $\frac{C-c}{v_0}$ есть одна и таже величина для всѣхъ газовъ; изъ этого слѣдуетъ, что отношеніе $\frac{c}{v_0}$, т. е. отношеніе теплоемкости при постоянномъ объемѣ къ единицѣ объема,—также постоянно для всѣхъ газовъ.

[1]) Poisson, Traité de mécanique, Tome II, Chap. VI. Paris, 1833.

Такъ какъ C и v_0 непосредственно опредѣлены изъ опыта $\left(\text{удѣльный вѣсъ газа } \frac{1}{1000 v_0}\right)$, то легко доказать, что отношеніе $\frac{C}{v_0}$ есть постоянная величина. При этомъ формула (10) дастъ возможность вычислить теплоемкость c при постоянномъ объемѣ.

Такимъ образомъ получаются слѣдующія числа для водорода и атмосфернаго воздуха:

	$\frac{1}{v_0}$	C	$C-c=A\alpha p_0 v_0$	$c=C-A\alpha p_0 v_0$	$\frac{C}{v_0}$	$\frac{c}{v_0}$
Воздухъ..	1,29318	0,23741	0,0688	0,1686	0,307	0,218
Водородъ.	0,08957	3,40900	0,994	2,415	0,305	0,216

53. Для опредѣленія всѣхъ величинъ, встрѣчающихся при измѣненіи состояній газовъ, мы приняли: 1) уравненіе (3), заключающее въ себѣ законы Маріотта и Гей-Люссака (n^o44); 2) законъ Джуля (n^o45); 3) что теплоемкость при постоянномъ давленіи не зависитъ отъ температуры (n^o49) и, наконецъ, 4) что отношеніе теплоемкости при постоянномъ давленіи къ единицѣ объема—одна и та же постоянная для всѣхъ газовъ (n^o52).

Послѣдніе два закона доказаны опытами Реньо. Законы Маріотта и Гей-Люссака давно уже приняты, а Реньо опредѣлилъ обстоятельно приближеніе, съ которымъ они могутъ быть прикладываемы къ важнѣйшимъ газамъ, а именно: къ воздуху, азоту, водороду и углекислотѣ [1]).

[1]) Объ уклоненіяхъ газовъ отъ законовъ Маріотта и Гей-Люссака: Regnault, Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. Tome XXI, p. 329. Joule and Thomson, On the thermal effects of fluids in motion. Philosophical Transactions for the year 1854 *).

*) Критику этихъ опытовъ читатель найдетъ въ вышеупомянутомъ сочиненіи Д. Менделѣева: «Объ упругости газовъ», стр. 1 и проч., часть I, 1875 года. *Примѣч. перев.*

54. Что касается втораго закона, т. е. что внутренняя энергія газа зависитъ только отъ одной температуры, то онъ вытекаетъ изъ извѣстныхъ теоретическихъ воззрѣній на строеніе газовъ, о чемъ мы еще будемъ говорить позже. Впрочемъ, не лишнее сказать нѣсколько словъ объ опытномъ доказательствѣ, имѣющемся по этому предмету.

Гей-Люссакъ уже показалъ, что если соединить шаръ, наполненный газомъ, съ пустымъ шаромъ одинаковой величины, то въ первомъ температура понизится, а во второмъ, напротивъ того, на столько же повысится. Но, при этомъ, разница въ давленіяхъ была слишкомъ мала, что бы возможно было съ точностью опредѣлить измѣненіе температуры.

Джуль возобновилъ этотъ опытъ при болѣе выгодныхъ обстоятельствахъ [1]).

Въ одномъ изъ опытовъ онъ употреблялъ два металлическихъ пріемника одинаковой величины, внутреннее пространство которыхъ могло быть соединено посредствомъ трубки съ краномъ, и оба опускались въ одинъ и тотъ же водяной калориметръ. Одинъ изъ сосудовъ A содержалъ 120 граммовъ сухаго воздуха при давленіи 22-хъ атмосферъ, а другой—B былъ пустой, или содержалъ въ себѣ воздухъ самое большое что при давленіи въ $\frac{1}{1000}$ атмосферы. Какъ только былъ открытъ кранъ,—воздухъ распредѣлялся въ обоихъ пріемникахъ равномѣрно. Объемъ его увеличивался вдвое, а давленіе на столько же уменьшалось, при чемъ калориметръ не показывалъ измѣненія температуры.

До открытія крана воздухъ, заключавшійся въ сосудѣ A, имѣлъ температуру t, которой соотвѣтствуетъ извѣстная внутренняя энергія. Сосудъ же B былъ пустой; слѣдовательно, газъ удвоился въ объемѣ, не произведя никакой внѣшней работы. Далѣе, калориметръ не показывалъ измѣненія температуры: значитъ произошла перемѣна состоянія безъ пріобрѣтенія и отдачи теплоты.

[1]) Joule, Philosophical Magazine, vol. XXVI. May 1845. Kröning's Journal, Bd. III.

Если въ общемъ уравненіи (5)

$$EQ = \Delta U + S$$

положить $S = 0$ и $Q = 0$, то будетъ также и $\Delta U = 0$. И такъ, внутренняя энергія газа была постоянна впродолженіе измѣненія; слѣдовательно, она не зависитъ отъ объема, а есть функція одной только температуры.

Въ другомъ опытѣ Джуль отдѣлилъ оба сосуда и погрузилъ ихъ въ два отдѣльные калориметра, окруживъ соединительную трубку дурнымъ проводникомъ, для того, чтобы по возможности избавиться отъ потери теплоты чрезъ эту трубку. Одинъ изъ сосудовъ A опять-таки заключалъ въ себѣ газъ при давленіи 22-хъ атмосферъ, другой же B былъ почти пустой. Какъ только было установлено сообщеніе,—калориметръ, въ которомъ находился сжатый газъ, охлаждался, другой же, напротивъ того, нагрѣвался, при чемъ пріобрѣтенное количество теплоты съ одной стороны и отданное съ другой были совершенно равны.—При расширеніи сжатый газъ получаетъ значительную скорость, влекущую за собою потерю тепловой энергіи, которая отчасти переходитъ въ видимую. Газъ, достигнувъ сосуда B, вслѣдствіе ударовъ о стѣнки, измѣняетъ свое поступательное движеніе въ колебанія: видимая энергія исчезаетъ, а появляется тепловая. Послѣ мы будемъ имѣть случай ближе изучить это явленіе.

Послѣдній опытъ Джуля былъ подтвержденъ Реньо при весьма различныхъ обстоятельствахъ.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Теорема Карно.

Обратимыя измѣненія состояній. — Линіи измѣненій состоянія. — Круговой процессъ Карно. — Опытный законъ Клаузіуса. — Теорема Карно. — Опредѣленіе интегральной функціи. — Абсолютная температура. — Уравненіе Вильяма Томсона. — Уравненіе Ранкина. — Замѣчаніе къ теоремѣ Карно.

55. При разсматриваніи измѣненій состоянія однороднаго тѣла, не имѣющаго видимаго движенія и подверженнаго равномѣрному давленію, мы руководствовались только началомъ эквивалентности, какъ слѣдствіемъ основной гипотезы о природѣ теплоты и предложенія о живыхъ силахъ. Мы вывели изъ него уравненіе ($n^0 35$) для какого нибудь измѣненія AB:

$$(1) \qquad EQ = \Delta U + S$$

Далѣе, мы видѣли ($n^0 42$), что для безконечно малаго измѣненія MN имѣется уравненіе:

$$(2) \qquad \frac{dQ}{\lambda} = d\mu$$

гдѣ λ и μ суть функціи перемѣнныхъ независимыхъ. Если тѣло переходитъ изъ состоянія A въ B (фиг. 5), которыя помѣтимъ значками 1 и 2, то пріобрѣтенное или отданное имъ количество теплоты, по уравненію (2), будетъ

$$Q = \int_1^2 \lambda d\mu.$$

Какъ мы уже замѣтили въ $n^0 38$, этотъ интегралъ зависитъ не только отъ начальнаго и конечнаго состояній тѣла, но и отъ ряда измѣненій состоянія или отъ вида кривой, по которой это тѣло переходитъ изъ состоянія A въ B. Кромѣ того, мы имѣемъ:

Фиг. 5.

$$\int_1^2 \frac{dQ}{\lambda} = \mu_2 - \mu_1$$

Правая часть этого уравненія зависитъ только отъ начальнаго и конечнаго состояній, а ни какъ не отъ ряда измѣненій состоянія или отъ пути AMB; слѣдовательно, и лѣвая часть не зависитъ также отъ хода этихъ измѣненій.

Въ особомъ случаѣ, если тѣло снова возвращается въ свое первоначальное состояніе, то, такъ какъ $\mu_2 = \mu_1$, получимъ:

$$\int \frac{dQ}{\lambda} = 0$$

Теперь мы будемъ разсматривать второе начало механической теоріи теплоты и начнемъ съ нѣкоторыхъ предварительныхъ разсужденій.

Обратимыя измѣненія состояній.

56. Если тѣло испытываетъ рядъ измѣненій состоянія, сопровождаемыхъ тепловыми явленіями, то иногда случается, что при совершенно одинаковыхъ обстоятельствахъ могутъ имѣть мѣсто обратныя измѣненія; при этомъ говорятъ, что измѣненія состояній **обратимы**. Въ противоположность этому, измѣненія не называются обратимыми, когда обстоятельства такого рода, что если они совершаются въ обратномъ порядкѣ, то тѣло нельзя заставить снова пройдти прежнія состоянія.

Допустимъ, напримѣръ, что внѣшнее, безконечно большое тѣло K, которое должно быть совершеннымъ проводникомъ теплоты, по-

стоянно приводится въ сообщеніе съ другимъ, измѣненія состояній котораго мы разсматриваемъ, и что проводникъ сообщаетъ ему теплоту такимъ образомъ, что оба тѣла всегда имѣютъ одинаковую температуру.

Очевидно, при этомъ измѣненія состояній будутъ обратимыя. Если тѣло перешло изъ состоянія A въ B, по извѣстному пути AMB, то оно можетъ возвратиться изъ B въ A тѣмъ же путемъ BMA и въ обратномъ порядкѣ. Если при переходѣ изъ M въ N оно получило нѣкоторое количество теплоты, то при обратномъ переходѣ изъ N въ M оно отдастъ его такое же точно количество. Если въ первомъ случаѣ внѣшняя работа $MNN'M'$ была положительная, то во второмъ она будетъ отрицательная, но одинаковая по абсолютной величинѣ.

Для того чтобы измѣненіе состояній было обратимое, необходимо, чтобы внѣшнее тѣло K имѣло постоянно одинаковую температуру съ тѣмъ, за измѣненіями котораго мы слѣдимъ. Если бы внѣшнее тѣло K имѣло высшую температуру, чѣмъ другое, то оно могло бы сообщить этому послѣднему достаточное количество теплоты для прохожденія измѣненія состоянія MN, но не могло бы пріобрѣсти этого самаго количества теплоты, когда тѣло должно было бы отдать его при обратномъ пути NM: слѣдовательно, обратное измѣненіе состояній невозможно.

Для того чтобы измѣненіе состояній было обратимое, необходимо еще выполнить второе условіе. Мы означили въ состояніи равновѣсія черезъ p давленіе, соотвѣтствующее удѣльному объему v при температурѣ t. Чтобы измѣненіе состояній было обратимымъ, необходимо чтобы внѣшнее давленіе, которое назовемъ чрезъ p', всегда равнялось p.

Если бы внѣшнее давленіе p' было меньше p, то тѣло расширилось бы, и обратное измѣненіе было бы невозможно. Наоборотъ, если бы внѣшнее давленіе p' было больше p, то тѣло сжалось бы, и обратное измѣненіе опять-таки было бы невозможно. Въ послѣдствіи мы будемъ предполагать всегда, что оба условія выполнены, т. е. что измѣненія состояній обратимыя.

Линіи измѣненій состоянія.

57. Между различными линіями измѣненій состоянія есть такія, съ которыми намъ придется часто имѣть дѣло. Весьма основательно отличать ихъ особенными названіями.

1. Тѣло можетъ пройдти рядъ измѣненій состоянія, не отдавая и не пріобрѣтая въ любой моментъ теплоты. Линія, представляющая собою ходъ такого измѣненія состояній, называется, по Верде, линіей безъ перехода теплоты или, по Ранкину,—адіабатическою линіей.

2. Если тѣло пріобрѣтаетъ или отдаетъ теплоту такимъ образомъ, что температура его не измѣняется, то линія, показывающая ходъ такихъ измѣненій, называется изотермическою.

3. Наконецъ, подъ линіей равной энергіи понимается такая линія при измѣненіи состояній, по которой тѣло постоянно сохраняетъ одну и туже внутреннюю энергію.

Если извѣстенъ законъ измѣненій состоянія тѣла, то легко вывести уравненія этихъ различныхъ линій. Возьмемъ за перемѣнныя независимыя v и p; тогда всѣ прочія величины, зависящія отъ состоянія тѣла, будутъ функціями этихъ двухъ перемѣнныхъ:

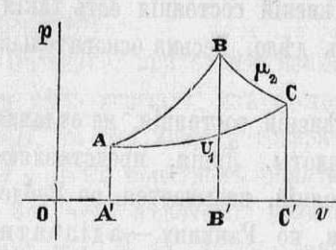
$$t = f(v, p)$$
$$U = F(v, p)$$
$$\mu = \mathfrak{F}(v, p)$$

Если въ первомъ уравненіи принять t за постоянную, то оно представитъ изотермическую линію и будетъ общимъ уравненіемъ изотермическихъ линій. Далѣе, разсматривая U постоянною, второе уравненіе будетъ общимъ уравненіемъ линій одинаковыхъ энергій и, наконецъ, смотря на μ какъ на постоянную, третье уравненіе будетъ общимъ уравненіемъ адіабатическихъ линій.

58. Положимъ, напримѣръ, что тѣло пришло изъ состоянія $A(v_1, p_1)$ въ состояніе $B(v_2, p_2)$, проходя по линіи измѣненій AB (фиг. 6). Если проведемъ чрезъ точку A линію одинаковой энер-

гіи U_1, а чрезъ B—адіабатическую линію μ_2, то онѣ пересѣкутся въ точкѣ C. Основное уравненіе

Фиг. 6.



$$(1) \qquad EQ = \Delta U + S$$

будетъ тогда

$$EQ = U_2 - U_1 + S$$

Произведенная тѣломъ внѣшняя работа выразится площадью криволинейной трапеціи $ABB'A'$. Я утверждаю, что измѣненіе внутренней энергіи $U_2 - U_1$ выразится площадью трапеціи $BCC'B'$. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что тѣло изъ состоянія B пришло въ C, проходя по адіабатической линіи μ_2. Такъ какъ при переходѣ пріобрѣтенная тѣломъ теплота равна нулю и внутренняя энергія въ точкѣ C такая же какъ и въ A, то, назвавъ произведенную имъ при этомъ переходѣ внѣшнюю работу черезъ S', получимъ:

$$U_1 - U_2 + S' = 0$$

или

$$U_2 - U_1 = S'$$

Внутренняя энергія уменьшается и переходитъ въ работу S', которая выразится площадью криволинейной трапеціи $BCC'B'$. Количество теплоты Q, сообщенное тѣлу при переходѣ AB, выражается въ механическихъ единицахъ суммою обѣихъ площадей

$$ABB'A' + BCC'B'$$

59. Эти различныя линіи легко опредѣлить, если тѣло—совершенный газъ. Очевидно, что онѣ приводятся только къ двумъ родамъ. Такъ какъ энергія газа безъ видимаго движенія ($n^o 45$) зависитъ только отъ температуры, а при всякомъ переходѣ, когда температура постоянна,—внутренняя энергія также не измѣняется, то, слѣдовательно, для совершенныхъ газовъ изотермическія линіи и линіи одинаковыхъ энергій тождественны.

Каждая изотермическая линія есть равнобочная гипербола, уравненіе которой

$$pv = \alpha p_0 v_0 (a + t)$$

при чемъ t разсматривается какъ постоянная.

Мы нашли (n^o 49), что

$$\mu = \log v^C p^c$$

Принимая μ за постоянную, будемъ имѣть для адіабатическихъ линій уравненіе:

$$v^C p^c = e^{\mu}$$

Слѣдовательно, онѣ также кривыя гиперболической формы, ассимптотически подходящія къ обѣимъ осямъ координатъ $0v$ и $0p$. Постоянная C больше c; поэтому ордината p, какъ соотвѣтствующая ордината равнобочной гиперболы, уменьшается быстрѣе, чѣмъ v возрастаетъ.

Круговой процессъ Карно.

60. Круговымъ процессомъ называютъ рядъ такого рода измѣненій, при которыхъ тѣло возвращается въ свое первоначальное состояніе. Между всевозможными круговыми процессами есть одинъ, который играетъ важную роль въ этой теоріи. Онъ изображается двумя изотермическими и двумя адіабатическими линіями и называется круговымъ процессомъ Карно.

Фиг. 7.

Разсмотримъ двѣ изотермическія линіи DC и AB (фиг. 7), изъ которыхъ первая соотвѣтствуетъ температурѣ t_1, а вторая—болѣе высокой температурѣ t_2, и двѣ адіабатическія линіи AD и BC, отвѣчающія значеніямъ μ_1 и μ_2. Если тѣло выходитъ изъ состоянія A и къ нему же возвращается, проходя одрядъ измѣненія

AB, BC, CD, DA, то оно совершитъ круговой процессъ Карно. Чтобы возможно было такое измѣненіе состояній, необходимо, чтобы два безконечно большія тѣла, которыя суть совершенные проводники теплоты, — одно K_2 при температурѣ t_2, другое K_1 при температурѣ t_1, — попемѣнно приходили въ сообщеніе съ разсматриваемымъ тѣломъ. Если круговой процессъ совершается по $ABCDA$, то будемъ называть его прямымъ.

1. Во время перехода AB тѣло имѣетъ постоянную температуру t_2; оно получаетъ извѣстное количество теплоты Q_2 отъ внѣшняго тѣла K_2; это количество теплоты производитъ измѣненіе внутренней энергіи и положительную внѣшнюю работу, выражаемую площадью трапеціи $ABB'A'$.

2. Во время перехода BC по адіабатической линіи тѣло не обмѣнивается теплотой съ внѣшнимъ тѣломъ, такъ что оно не теряетъ и не пріобрѣтаетъ теплоты; внутренняя же энергія уменьшается, превращаясь во внѣшнюю положительную работу $BCC'B'$.

Такимъ образомъ тѣло, перейдя изъ состоянія A въ C, произвело внѣшнюю работу, выражаемую площадью $ABCC'A'$.

3. Во время перехода CD, при постоянной температурѣ t_1, внѣшняя работа отрицательная. Внѣшнее давленіе производитъ въ тѣлѣ извѣстную работу $CDD'C'$. Она влечетъ за собою измѣненіе внутренней энергіи и причиняетъ отдачу извѣстнаго количества теплоты Q_1, которое переходитъ во внѣшнее тѣло K_1, находящееся въ соприкосновеніи съ разсматриваемымъ и имѣющее съ нимъ одинаковую температуру.

4. Наконецъ, по адіабатической линіи DA снова прекращается всякій обмѣнъ теплоты. Пріобрѣтенная внѣшняя работа $DAA'D'$ увеличиваетъ внутреннюю энергію тѣла, которое и достигаетъ своего начальнаго состоянія.

Тѣло, измѣненія состояній котораго мы разсматривали, есть настоящая машина, работающая по способу круговаго процесса Карно. Она находится въ попемѣнномъ сообщеніи съ внѣшнимъ тѣломъ K_2, отъ котораго пріобрѣтаетъ извѣстное количество теплоты Q_2 при постоянной температурѣ t_2, и съ внѣшнимъ же тѣломъ K_1, которому отдаетъ количество теплоты Q_1 при постоянной температурѣ t_1.

Въ концѣ каждаго круговаго процесса внутренняя энергія U снова получаетъ начальное свое значеніе; вслѣдствіе чего $\Delta U=0$, и основное уравненіе

$$(1) \qquad EQ=\Delta U+S$$

приведется къ

$$EQ=S$$

Пріобрѣтенное машиною количество теплоты $Q=Q_2-Q_1$ превратилось въ эквивалентное количество S внѣшней работы, которая есть разность между работой $ABCC'A'$, произведенной машиною, и пріобрѣтенною работою $CDAA'C'$. Она выражается площадью $ABCD$.

61. Ясно, что такая машина обратимая. Предположимъ теперь, что она работаетъ въ обратномъ направленіи, выходя изъ состоянія D.

По изотермической линіи DC машина пріобрѣтаетъ отъ внѣшняго тѣла K_1 количество теплоты, совершенно равное Q_1; она претерпѣваетъ измѣненіе внутренней энергіи и производитъ внѣшнюю работу, которая выражается площадью $DCC'D'$. По адіабатической линіи CB она пріобрѣтаетъ внѣшнюю работу $CBB'C'$, вслѣдствіе которой происходитъ приращеніе внутренней энергіи. По изотермической линіи BA машина испытываетъ измѣненіе внутренней энергіи: она пріобрѣтаетъ внѣшнюю работу $BAA'B'$ и отдаетъ внѣшнему тѣлу K_2 количество теплоты Q_2. Наконецъ, по адіабатической линіи AD происходитъ уменьшеніе внутренней энергіи, которое доставляетъ внѣшнюю работу $ADD'A'$.

Въ этомъ обратномъ процессѣ машина пріобрѣтаетъ отъ нижняго источника K_1 количество теплоты Q_1 и отдаетъ верхнему источнику K_2 большее количество теплоты Q_2, при чемъ, слѣдовательно, проявляется количество ея Q_2-Q_1. Въ тоже самое время машина получаетъ количество внѣшней работы $CBAA'C'$, которое больше произведенной ею работы $ADCC'A'$. Разность S выражается площадью $ABCD$. Это пріобрѣтенное машиною количество работы переходитъ въ эквивалентное ему количество теплоты, и мы получимъ уравненіе:

$$S=E(Q_2-Q_1)$$

И такъ, при прямомъ процессѣ количество теплоты $Q_2 - Q_1$ переходитъ въ эквивалентное количество внѣшней работы, которую производитъ машина; такая машина будетъ движущею. Напротивъ того, при обратномъ процессѣ количество S внѣшней работы переходитъ въ эквивалентное количество теплоты $Q_2 - Q_1$. Такимъ образомъ получимъ машину, производящую теплоту посредствомъ работы.

Опытный законъ Клаузіуса.

62. Если два совершенные проводника теплоты K_2 и K_1, изъ которыхъ первый пусть имѣетъ температуру t_2, а второй болѣе низкую температуру t_1, находятся между собою какимъ-нибудь образомъ въ непосредственномъ обмѣнѣ теплоты,—будь это лучеиспусканіе или теплопроводность,—то теплота перейдетъ изъ тѣла K_2 въ K_1. Если предположить, что оба эти тѣла безконечно велики, слѣдовательно температура ихъ измѣняется незамѣтно, то и переходъ будетъ совершаться въ томъ же направленіи безконечно долго и однообразно. Предположимъ теперь, что эти два проводника теплоты находятся не въ прямомъ сообщеніи другъ съ другомъ, но посредствомъ машины, работающей по круговому процессу Карно. Клаузіусъ принимаетъ, что какъ бы ни было установлено сообщеніе,— отъ болѣе холоднаго тѣла K_1 нельзя передать теплоты болѣе теплому K_2 безъ затраты работы [1]).

Этотъ законъ не ясенъ безъ дальнѣйшаго. На него смотрятъ какъ на обобщеніе рода и способа, по которымъ совершается переходъ теплоты между двумя непосредственно обмѣнивающимися ею тѣлами.

Теорема Карно.

63. Эта теорема заключается въ томъ, что **для всѣхъ тѣлъ, проходящихъ измѣненія состояній въ тѣхъ же предѣлахъ температуръ соотвѣтственно круговому процессу Карно, отношеніе пріобрѣтенной отъ верхняго источника теплоты къ количеству ея, перешедшему въ работу, есть постоянная величина.**

1) Clausius, Pogg. Ann. Bd. XCIII, S. 481 und Pogg. Ann. Bd. CXX, S. 426.

Положимъ, что различныя тѣла испытываютъ измѣненія, соотвѣтствующія прямому круговому процессу Карно, проходя по извѣстнымъ адіабатическимъ и изотермическимъ линіямъ, соотвѣтствующимъ тѣмъ же самымъ температурамъ t_1 и t_2. Изотермическія линіи для различныхъ тѣлъ не тожественны, потому что форма ихъ зависитъ отъ природы тѣлъ.

Если $Q_2, Q_2', Q_2'', \ldots$ означаютъ количества теплоты, получаемыя тѣлами отъ верхняго источника K_2, $Q_1, Q_1', Q_1'', \ldots$ — количества теплоты, отдаваемыя нижнему источнику, то теорема Карно гласитъ, что отношенія

$$\frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q_2'}{Q_2' - Q_1'} = \frac{Q_2''}{Q_2'' - Q_1''} = \ldots$$

равны. — Мы можемъ ограничиться разсматриваніемъ только двухъ тѣлъ. И такъ, требуется доказать, что

$$\frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q_2'}{Q_2' - Q_1'} \quad \text{или} \quad \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2' - Q_1'} = \frac{Q_2}{Q_2'}$$

Покажемъ, что если отношенія неравны, то мы придемъ къ выводу, противорѣчащему опытному закону Клаузіуса.

Предположимъ, что первое отношеніе соизмѣримо и равно отношенію двухъ цѣлыхъ чиселъ m и n:

$$(3) \qquad \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2' - Q_1'} = \frac{m}{n}$$

Допустимъ, что второе отношеніе $\frac{Q_2}{Q_2'}$ отличается отъ перваго,—напримѣръ оно меньше; тогда

$$\frac{Q_2}{Q_2'} < \frac{m}{n}$$

или

$$(4)\qquad mQ'_2-nQ_2>0$$

Означимъ черезъ A и B оба разсматриваемыя тѣла, проходящія измѣненія состояній: первое сообразно круговому процессу (A), а второе сообразно круговому процессу (B). Составимъ изъ обоихъ тѣлъ сложную машину, въ которой A совершаетъ n разъ прямой круговой процессъ (A), между тѣмъ какъ B проходитъ m разъ обратный круговой процессъ (B); затѣмъ вычислимъ произведенную машиной работу впродолженіе этого періода. Во время каждаго круговаго процесса тѣло A превращаетъ въ работу количество теплоты Q_2-Q_1, а потому произведенная втеченіе всего періода работа будетъ

$$nE(Q_2-Q_1)$$

Тѣло же B при каждомъ круговомъ процессѣ производитъ количество теплоты $Q'_2-Q'_1$; а потому втеченіе того же періода расходуетъ количество работы

$$mE(Q'_2-Q'_1)$$

Изъ этого слѣдуетъ, что произведенная машиною полная работа равна

$$nE(Q_2-Q_1)-mE(Q'_2-Q'_1)$$

Но эта работа, по отношенію (3), равна нулю, и выходитъ, такимъ образомъ, что машина не произвела и не израсходовала внѣшней работы.

Опредѣлимъ теперь обмѣнъ теплоты. Тѣло A дѣйствуетъ въ прямомъ направленіи и пріобрѣтаетъ, впродолженіе разсматриваемаго періода, отъ верхняго источника K_2 количество теплоты nQ_2, а нижнему источнику K_1 отдаетъ nQ_1. Тѣло B дѣйствуетъ обратно: оно пріобрѣтаетъ отъ источника K_1 количество теплоты mQ'_1, а источнику K_2 отдаетъ mQ'_2; слѣдовательно верхній пріобрѣлъ

$$mQ'_2-nQ_2$$

а нижній потерялъ

$$mQ'_1-nQ_1$$

Оба эти количества теплоты по отношенію (3) равны, а по отношенію (4)—положительныя. Слѣдовательно, машина передала отъ верхняго источника къ нижнему количество теплоты mQ'_1-nQ_1, не затративъ ни какой работы, что противорѣчитъ закону Клаузіуса.

Такимъ образомъ доказывается, что второе отношеніе не можетъ быть больше перваго; слѣдовательно, оба они должны быть равны между собою; поэтому

$$(5)\qquad \frac{Q_2-Q_1}{Q'_2-Q'_1}=\frac{Q_2}{Q'_2}\quad\text{или}\quad \frac{Q_2}{Q_2-Q_1}=\frac{Q'_2}{Q'_2-Q'_1}$$

64. *Слѣдствіе.* Изъ равенства отношеній $\frac{Q_2-Q_1}{Q_2}=\frac{Q'_2-Q'_1}{Q'_2}$ вытекаетъ, что

$$(6)\qquad \frac{Q_1}{Q_2}=\frac{Q'_1}{Q'_2}$$

т. е. *для всѣхъ тѣлъ, проходящихъ круговые процессы Карно въ однихъ и тѣхъ же предѣлахъ температуръ, отношеніе* $\frac{Q_2}{Q_1}$, *т. е. отношеніе пріобрѣтеннаго верхнимъ источникомъ количества теплоты къ отданному нижнимъ, постоянно.*

Это постоянное отношеніе для всѣхъ тѣлъ не зависитъ отъ адіабатическихъ линій μ_1 и μ_2, находящихся въ круговомъ процессѣ, а зависитъ единственно только отъ температуръ t_2 и t_1. Мы воспользуемся этимъ свойствомъ, чтобы опредѣлить форму функціи λ, которая, какъ видѣли выше, обращаетъ основное уравненіе въ интегрируемое.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦІИ.

Абсолютная температура.

65. Предложимъ, что машина совершаетъ круговой процессъ Карно $ABCD$ (фиг. 8), представленный двумя изотермическими ли-

Фиг. 8.

ніями t_2 и t_1 и двумя безконечно близко лежащими адіабатическими. Положимъ $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu + d\mu$. Для каждаго безконечно малаго измѣненія состоянія имѣемъ ($n^o 42$):

$$dQ = \lambda d\mu$$

гдѣ λ означаетъ функцію перемѣнныхъ независимыхъ. Назовемъ λ_1 значеніе этой функціи въ точкѣ D, а λ_2 — значеніе ея въ точкѣ A; тогда для перехода DC

$$Q_1 = \lambda_1 d\mu$$

и для перехода AB

$$Q_2 = \lambda_2 d\mu.$$

Значеніе $d\mu$ одно и тоже для обоихъ переходовъ, потому что они совершаются между тѣми же самыми адіабатическими линіями μ и $\mu + d\mu$. Такимъ образомъ выводимъ:

$$\text{пред.}\ \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Но мы сейчасъ видѣли, что отношеніе $\frac{Q_2}{Q_1}$ не зависитъ отъ адіабатическихъ линій μ_1 и μ_2 (въ настоящемъ же случаѣ—отъ μ и $d\mu$); что оно зависитъ только отъ температуръ t_2 и t_1 и что, наконецъ, оно для всѣхъ тѣлъ одно и тоже. Отношеніе $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ значеній въ соотвѣтствующихъ точкахъ A и D изотермическихъ линій t_2 и t_1 должно быть также независимо отъ μ и быть одною и тою же функціею отъ t_1 и t_2 для всѣхъ тѣлъ. Подъ соотвѣтствующими точками мы разумѣемъ здѣсь такія, которыя лежатъ на одной и той же адіабатической линіи μ.

66. Отсюда слѣдуетъ, что функція λ для всѣхъ тѣлъ есть одна и таже функція $f(t)$ температуръ, умноженная на функцію

отъ μ, имѣющую для каждаго тѣла особое и произвольное значеніе, т. е.

$$(7) \qquad \lambda = f(t) \times \varphi(\mu)$$

Легко показать, что этого условія достаточно, потому что если оно выполнено, то имѣемъ:

$$\lambda_1 = f(t_1) \times \varphi(\mu)$$
$$\lambda_2 = f(t_2) \times \varphi(\mu)$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{f(t_2)}{f(t_1)}.$$

Такимъ образомъ отношеніе $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ для всѣхъ тѣлъ есть одна и таже функція температуръ t_2 и t_1.

Теперь я утверждаю, что эта форма функціи λ вытекаетъ изъ теоремы Карно какъ необходимое слѣдствіе. Въ самомъ дѣлѣ, если отношеніе $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ зависитъ единственно только отъ температуръ t_2 и t_1, то это же можно сказать и объ отношеніи $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$, которое равно $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1$, а также и объ отношеніи

$$\frac{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}}{\lambda_1}$$

Положимъ, что обѣ изотермическія линіи лежатъ безконечно близко одна отъ другой; при этомъ достаточно положить $t_1 = t$, $t_2 = t + dt$. Мы можемъ взять за перемѣнныя независимыя t и μ, чтобы опредѣлить каждую точку или каждое состояніе тѣла посредствомъ профили изотермической линіи t и адіабатической μ; тогда величина λ будетъ функціей отъ t и μ. Предѣлъ отношенія $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}$ есть частная производная $\frac{d\lambda}{dt}$ этой функціи по t, смотря на μ какъ на постоянную. Такимъ образомъ

$$\text{пред.}\ \frac{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}}{\lambda_1} = \frac{\frac{d\lambda}{dt}}{\lambda}$$

По предъидущему, это отношенiе для всѣхъ тѣлъ есть одна и таже функцiя $\psi(t)$ температуръ; слѣдовательно, можно написать:

$$\frac{\frac{d\lambda}{dt}}{\lambda} = \frac{d\,log\,\lambda}{dt} = \psi(t)$$

Интегрируя относительно t и замѣчая, что интегральная постоянная есть произвольная функцiя другой перемѣнной μ, получимъ:

$$log\,\lambda = \int\psi(t)dt + log\,\varphi(\mu)$$

или

$$\lambda = \varphi(\mu)e^{\int\psi(t)dt}$$

Положивъ здѣсь

$$e^{\int\psi(t)dt} = f(t)$$

получимъ:

$$\lambda = f(t)\,\varphi(\mu)$$

Функцiя $\psi(t)$ — одна и таже для всѣхъ тѣлъ; тоже самое относится и къ функцiи $f(t)$; а потому приданная нами форма функцiи λ есть необходимое слѣдствiе теоремы Карно.

Такъ какъ функцiя $\varphi(\mu)$ произвольная, то можно положить $\varphi(\mu) = 1$, и получится:

$$\lambda = f(t)$$

Итакъ, между различными значенiями интегральной функцiи всегда найдется одно изъ нихъ, которое есть функцiя одной только температуры и, вмѣстѣ съ тѣмъ, тоже самое для всѣхъ тѣлъ.

67. Весьма легко воспользоваться этою функцiею λ для устройства температурной скалы, которую мы назовемъ скалою абсолютныхъ температуръ. Если обозначимъ черезъ T абсолютную температуру, то придемъ къ тому положенiю, что $T=\lambda$.

Эта скала уже извѣстна. Для совершенныхъ газовъ мы нашли ($n^0 48$), что $\lambda = a + t$, гдѣ t — температура, измѣренная воздушнымъ термометромъ, а постоянная $a = 273$. Функцiя λ одной только температуры — таже самая для всѣхъ тѣлъ, слѣдовательно вообще $\lambda = a + t$, а потому

$$(8) \qquad T = a + t$$

Такимъ образомъ скала абсолютныхъ температуръ совпадаетъ со скалою воздушнаго термометра, полагая абсолютную нулевую точку на 273 градуса ниже обыкновеннаго нуля.

На существованiи интегральной функцiи λ, одинаковой для всѣхъ тѣлъ и служившей намъ для опредѣленiя абсолютной температуры, основывается второе начало механической теорiи теплоты.

Оно заключается въ уравненiи

$$(b) \qquad \frac{dQ}{T} = d\mu$$

гдѣ μ зависитъ отъ природы тѣлъ и есть функцiя, опредѣляемая двумя перемѣнными независимыми.

68. Для любаго конечнаго измѣненiя состоянiя имѣемъ:

$$(9) \qquad \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \mu_2 - \mu_1$$

гдѣ μ_1 и μ_2 означаютъ начальное и конечное значенiя функцiи μ. Если измѣненiе состоянiй совершается по изотермической линiи, то, такъ какъ T постоянна, это уравненiе обратится въ

$$(10) \qquad \frac{Q}{T} = \mu_2 - \mu_1$$

Отсюда заключаемъ, что количество теплоты, необходимое для измѣненiя состоянiя по любой изотермической линiи между двумя данными адiабатическими, пропорцiонально абсолютной температурѣ.

Круговой процессъ Карно ($n^0 60$) составляется изъ двухъ изо-

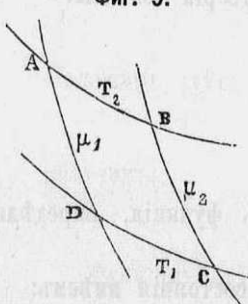
термическихъ линій AB и DC, лежащихъ между двумя адіабатическими AD и BC. И такъ, вслѣдствіе отношенія (10) имѣемъ:

$$(11) \qquad \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} = \mu_2 - \mu_1$$

или

$$(12) \qquad \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Фиг. 9.



Это, по теоремѣ Карно ($n^o 63$), есть значеніе отношенія количества теплоты, перешедшей въ работу, къ количеству ея, пріобрѣтенному отъ верхняго источника.

69. Второе начало (b) составляетъ непосредственное слѣдствіе теоремы Карно; оно выведено нами съ помощью опытнаго закона Клаузіуса и состоитъ въ распространеніи обыкновенныхъ законовъ равновѣсія температуръ и передачи теплоты. Только тогда можно узнать всю важность теоремы Карно и чрезвычайную заслугу, оказанную имъ наукѣ, когда припомнимъ, что не для всѣхъ еще тѣлъ извѣстны механическія условія равновѣсія температуръ. Казалось бы, что понятію о равенствѣ температуръ суждено было остаться чисто эмпирическимъ понятіемъ, и что теорія теплоты должна остановиться въ самомъ ея началѣ; но, къ счастью, теорема Карно дала возможность обойдти затрудненія, установивъ общее отношеніе (b) между количествомъ теплоты и температурой.

70. Для совершенныхъ газовъ этого затрудненія не существуетъ. Съ помощью извѣстныхъ ихъ свойствъ, мы безъ дальнѣйшаго показали существованіе интегральной функціи, относящейся ко всѣмъ вообще газамъ и зависящей отъ одной только температуры. Эта функція есть $\lambda = a + t = T$ (для сокращенія положено $T = a + t$). Откуда выводимъ, что $\frac{dQ}{T} = d\mu$. Такимъ образомъ отношеніе

$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$ ($n^o 68$), а также и теорема Карно вытекаютъ отсюда какъ необходимыя слѣдствія.

Мы доказали вообще ($n^o 66$), не опираясь ни на какія особенныя свойства, существованіе интегральной функціи, относящейся ко всѣмъ тѣламъ и зависящей только отъ температуры. Если принять во вниманіе свойства совершенныхъ газовъ, то можно нѣсколько упростить это доказательство. Разсмотримъ какое нибудь тѣло и совершенный газъ, которые измѣняютъ свои состоянія по круговому процессу Карно въ однихъ и тѣхъ же предѣлахъ температуръ T_2 и T_1; тогда, по теоремѣ Карно ($n^o 64$), получимъ:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_1}$$

При этомъ количества теплоты Q_2 и Q_1 должны относиться къ тѣлу, а Q'_2 и Q'_1—къ газу. Но, по свойствамъ газовъ, послѣднее отношеніе извѣстно и равно $\frac{T_2}{T_1}$, слѣдовательно $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Далѣе, мы видѣли ($n^o 65$), что если предположить, что круговой процессъ совершается между двумя безконечно близко лежащими адіабатическими линіями μ и $\mu + d\mu$, то предѣлъ отношенія $\frac{Q_2}{Q_1}$ равняется $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; откуда $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_2}{T_1}$ или $\frac{\lambda_2}{T_2} = \frac{\lambda_1}{T_1}$. Отсюда заключаемъ, что отношеніе $\frac{\lambda}{T}$ по адіабатической линіи DA остается постояннымъ, а потому оно есть функція одного только μ и не зависитъ отъ T, такъ что $\lambda = T\varphi(\mu)$. Но въ $n^o 43$ доказано, что если найдена какая нибудь интегральная функція, то можно получить другую, умноживъ или раздѣливъ первую на произвольную функцію отъ μ. Если предъидущее значеніе λ раздѣлить на $\varphi(\mu)$, то получится $\lambda = T$.

Уравненіе Вильяма Томсона.

71. Вильямъ Томсонъ вывелъ изъ втораго начала

$$(b) \qquad \frac{dQ}{T} = d\mu$$

нѣсколько важныхъ отношеній.

Если взять за перемѣнныя независимыя v и p, то получимъ:

$$dQ = Xdv + Ydp$$

и, слѣдовательно,

$$d\mu = \frac{dQ}{T} = \frac{X}{T}dv + \frac{Y}{T}dp$$

Такъ какъ правая часть есть полный дифференціалъ, то должно быть:

$$\frac{d\left(\frac{X}{T}\right)}{dp} = \frac{d\left(\frac{Y}{T}\right)}{dv}$$

или

$$T\frac{dX}{dp} - X\frac{dT}{dp} = T\frac{dY}{dv} - Y\frac{dT}{dv}$$

$$X\frac{dT}{dp} - Y\frac{dT}{dv} = T\left(\frac{dX}{dp} - \frac{dY}{dv}\right)$$

Съ помощью уравненія Клаузіуса (α_1)(n°39), это равенство упростится, а именно оно будетъ:

$$(\beta_1) \qquad X\frac{dT}{dp} - Y\frac{dT}{dv} = AT$$

72. Если возьмемъ теперь за перемѣнныя независимыя T и v, то получимъ:

$$dQ = cdt + ldv = cdT + ldv$$

или

$$\frac{dQ}{T} = \frac{c}{T}dT + \frac{l}{T}dv$$

Такъ какъ это выраженіе есть полный дифференціалъ, то должно быть:

$$\frac{d\left(\frac{c}{T}\right)}{dv} = \frac{d\left(\frac{l}{T}\right)}{dT}$$

или

$$T\frac{dc}{dv} = T\frac{dl}{dT} - l$$

$$l = T\left(\frac{dl}{dT} - \frac{dc}{dv}\right)$$

Вслѣдствіе втораго уравненія Клаузіуса (α_2) (n°40), это уравненіе сведется на

$$(\beta_2) \qquad l = AT\frac{dp}{dT}$$

73. Возьмемъ, наконецъ, за перемѣнныя независимыя T и p, тогда получимъ:

$$dQ = CdT + hdp$$

или

$$\frac{dQ}{T} = \frac{C}{T}dT + \frac{h}{T}dp$$

Отсюда выходитъ условное уравненіе:

$$\frac{d\left(\frac{C}{T}\right)}{dp} = \frac{d\left(\frac{h}{T}\right)}{dT}$$

или

$$T\frac{dC}{dp} = T\frac{dh}{dT} - h$$

$$h = T\left(\frac{dh}{dT} - \frac{dC}{dp}\right)$$

Третье уравненіе Клаузіуса (α_3) ($n^\circ 41$) приводитъ это равенство къ простѣйшему:

$$(\beta_3) \qquad h = -AT\frac{dv}{dT}$$

74. Уравненіе (β_1) есть уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка; оно должно удовлетворяться T, какъ функціей обѣихъ перемѣнныхъ независимыхъ v и p. Во второмъ уравненіи (β_2) p разсматривается функціей отъ T и v, а въ уравненіи (β_3) v—функціей отъ T и p. Оба послѣднія уравненія можно представить въ видѣ уравненій въ частныхъ производныхъ, которыя должны удовлетворяться тою же функціей T обѣихъ перемѣнныхъ независимыхъ v и p.

Изобразимъ чрезъ $\varphi(T, v, p) = 0$ неизвѣстное отношеніе, существующее между температурой, удѣльнымъ объемомъ и давленіемъ. Если разсматривать здѣсь v постоянною, то обѣ перемѣнныя величины T и p будутъ функціями одна другой, и ясно, что обѣ получаемыя производныя $\frac{dT}{dp}$, $\frac{dp}{dT}$ дадутъ въ произведеніи единицу, принимая сначала T функціей отъ p, а потомъ p—функціей отъ T. Поэтому уравненіе (β_2) можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$(\beta_2') \qquad l\frac{dT}{dp} = AT$$

Равнымъ образомъ, принимая p за постоянную, величины T и v будутъ функціями одна другой, и обѣ производныя $\frac{dv}{dT}$, $\frac{dT}{dv}$ имѣютъ въ произведеніи единицу, а потому уравненіе (β_3) будетъ:

$$(\beta_3') \qquad h\frac{dT}{dv} = -AT$$

Изъ этого слѣдуетъ, что таже самая функція T обѣихъ перемѣнныхъ независимыхъ v и p удовлетворяетъ тремъ частнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ (β_1), (β_2'), (β_3'). Первое уравненіе содержитъ двѣ частныя производныя, каждое же изъ остальныхъ—по одной.

Уравненіе Ранкина.

75. Мы видѣли ($n^\circ 68$), что количество теплоты, необходимое для измѣненія состоянія по изотермической линіи AB опредѣляется формулою:

$$(13) \qquad Q = T(\mu_2 - \mu_1)$$

Для того же количества теплоты Ранкинъ нашелъ другое выраженіе, съ которымъ будетъ полезно познакомиться. Если обозначить черезъ S внѣшнюю работу, произведенную тѣломъ впродолженіе измѣненія состояній AB (фиг. 10), то

$$S = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

Фиг. 10.

Предположимъ, что тѣло проходитъ по другой изотермической линіи A_1B_1, ограниченной тѣми же значеніями v_1 и v_2 удѣльнаго объема, и которая, такимъ образомъ, лежитъ между параллельными AA' и BB'. Внѣшняя работа, произведенная при каждомъ изъ этихъ измѣненій состоянія, есть функція температуры, соотвѣтствующей изотермической линіи. Возьмемъ v и T за перемѣнныя независимыя и предположимъ, что изотермическая линія A_1B_1 лежитъ безконечно близко къ AB. Измѣненіе работы, соотвѣтствующее измѣненію изотермической линіи, выразится площадью AA_1B_1B, и получимъ:

$$\frac{dS}{dT} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dp}{dT}dv$$

Общее уравненіе

$$dQ = c\,dT + l\,dv$$

для изотермической линіи обратится въ

$$dQ = l dv$$

Замѣнивъ l его значеніемъ изъ уравненія (β_2), получимъ:

$$dQ = AT \frac{dp}{dT} dv$$

откуда слѣдуетъ, что

$$Q = AT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dp}{dT} dv$$

и, такимъ образомъ, придемъ къ формулѣ:

$$(14) \qquad Q = AT \frac{dS}{dT}$$

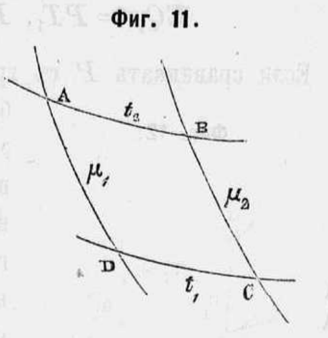
Замѣчанія къ теоремѣ Карно.

76. Теорема, высказанная Сади Карно въ 1824 году [1]) и играющая такую важную роль въ новой теоріи теплоты, въ которой она понимается какъ движеніе, явилась изъ совершенно противоположнаго воззрѣнія. Карно придерживался еще того мнѣнія, что теплота—матерія; онъ сравнивалъ количество ея въ тѣлѣ при опредѣленной температурѣ съ грузомъ, поддерживаемымъ на извѣстномъ уровнѣ. Онъ смотрѣлъ на переходъ теплоты отъ нагрѣтаго тѣла къ холодному въ машинѣ, получающей свое движеніе отъ теплоты, какъ на механическое явленіе, аналогичное паденію тѣла съ извѣстной высоты. Поэтому, онъ полагалъ, что вся теплота, отдаваемая верхнимъ источникомъ, была бы передана нижнему посредствомъ перехода ея отъ одного уровня къ другому; иными словами, онъ предположилъ, что $Q_2 = Q_1$. При такомъ способѣ сужденій, въ машинѣ,

[1]) Réflexions sur la puissance motrice du feu, et sur les machines propres à dévellopper cette puissance par S. Carnot. Paris, 1824. О той же теоремѣ—Clapeyron, Pogg. Ann. B. LIX.

дѣйствующей по круговому процессу $ABCD$, работа, произведенная паденіемъ теплоты, будетъ произведеніе изъ вѣса ея Q_2 на разность уровней, т. е. на разность температуръ $t_2 - t_1$. Отношеніе произведенной работы $Q_2(t_2 - t_1)$ къ вѣсу теплоты Q_2 равно разности температуръ $t_2 - t_1$. Для другаго тѣла, движущагося по круговому процессу въ тѣхъ же предѣлахъ температуръ, это отношеніе, очевидно, имѣетъ тоже самое значеніе. При обратномъ ходѣ машины необходимо употребить внѣшнюю работу $Q_1(t_2 - t_1)$ для того, чтобы вѣсъ теплоты Q_1 поднять отъ уровня t_1 до t_2. Такимъ образомъ и отношеніе затраченной работы къ поднятому вѣсу — тоже постоянно.

Фиг. 11.



Представленіе Карно имѣетъ большую правдоподобность, потому что онъ сравниваетъ тепловое явленіе съ механическимъ. Но оно ошибочно, такъ какъ предполагается, что количество теплоты при ходѣ машины остается постояннымъ [1]). Мы уже видѣли, что при прямомъ ходѣ машины количество теплоты Q_2, отнятое отъ верхняго источника, болѣе количества ея Q_1, переданнаго нижнему; разность же $Q_2 - Q_1$ превращается въ работу. При обратномъ ходѣ, наоборотъ,— затраченная работа превращается въ теплоту.

Въ послѣднее время Цейнеръ измѣнилъ представленіе Карно, для согласованія его съ новою теоріею [2]).

Разсмотримъ изотермическія линіи A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, соотвѣтствующія температурамъ T_1, T_2, T_3, и лежащія между двумя данными адіабатическими μ_1 и μ_2.

По уравненію (10) въ $n°68$ получимъ:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_3}{T_3} = \dots.$$

[1]) Clausius, Pogg. Ann. Bd. LXXIX, S. 368.

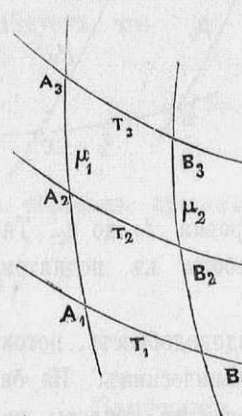
[2]) Gustav Zeuner, Grundzüde der mechanischen Wärmetheorie. 2 Aufl. Leipzig, 1866. S. 65.

Если означимъ черезъ $\frac{P}{E}$ значеніе этихъ равныхъ отношеній, то

$$EQ_1 = PT_1,\ EQ_2 = PT_2,\ EQ_3 = PT_3, \ldots.$$

Если сравнивать P съ грузомъ, то величины EQ_1, EQ_2, EQ_3,.... будутъ сходны съ потенціальными энергіями этого груза P, находящагося на различныхъ высотахъ, T_1, T_2, T_3,... При ходѣ машины по круговому процессу Карно $A_2B_2B_1A_1$ грузъ P опускается съ уровня T_2 къ уровню T_1; въ этомъ послѣднемъ онъ теряетъ количество потенціальной энергіи $PT_2 - PT_1 = E(Q_2 - Q_1)$, а пріобрѣтаетъ тоже самое количество работы.

Фиг. 12.



Въ настоящее время такое сравненіе не представляетъ никакихъ выгодъ. Лучше держаться той мысли, которая лежитъ въ основѣ новой теоріи, а именно, что существуетъ переходъ тепловой энергіи въ работу и обратно.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Тепловыя машины.

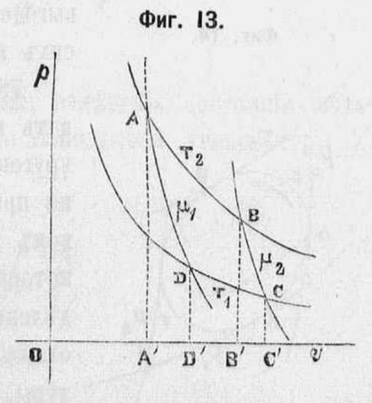
Общія основанія.—Газовыя машины.—Преобразователь теплоты.—Машина Штирлинга.—Машина Эриксона.

Общія основанія.

77. Займемся теперь приложеніемъ выведенныхъ выше формулъ къ тепловымъ машинамъ, которыя должны превращать теплоту въ работу.

Съ этой цѣлью мы разсмотримъ тепловую машину, работающую по круговому процессу Карно и попеременно приходящую въ сообщеніе съ тепловымъ источникомъ K_2 при температурѣ T_2 и съ охлаждающимъ тѣломъ K_1 при температурѣ T_1. Машина пріобрѣтаетъ отъ тепловаго источника количество теплоты Q_2 и передаетъ охлаждающему тѣлу меньшее количество ея Q_1. Разность $Q_2 - Q_1$ обращается во внѣшнюю работу S, выражаемую площадью $ABCD$.

Фиг. 13.



По первому закону ($n^o 35$) имѣемъ:

$$S = E\ (Q_2 - Q_1)$$

Отношеніе количества теплоты, перешедшей въ работу, къ количеству ея, отнятому отъ источника, называютъ **коэффиціентомъ** экономіи или **производительностью** тепловой машины.

Это отношеніе есть

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$$

Второй законъ даетъ намъ величину этого отношенія. Мы нашли (n^o68), что

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

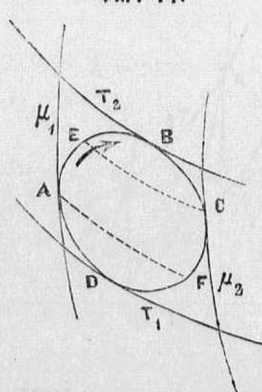
Это отношеніе зависитъ единственно только отъ предѣльныхъ температуръ, въ которыхъ машина работаетъ. Въ практикѣ слѣдуетъ стараться по возможности увеличивать его: для этого понижаютъ температуру T_1 и возвышаютъ, на сколько возможно, T_2.

Положимъ, напримѣръ, что высшая температура 300°, а низшая 15° Ц.; тогда коэффиціентъ экономіи будетъ

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{t_2 - t_1}{a + t_2} = \frac{285}{273 + 300} = \frac{285}{573}$$

почти половина. Въ смыслѣ производительности онъ былъ бы очень выгоденъ, но въ дѣйствительности еще до сихъ поръ не удалось его достигнуть.

Фиг. 14.



78. Если мы будемъ теперь разсматривать машину, работающую по какому нибудь круговому процессу, то она необходимо должна приходить въ сообщеніе то съ источникомъ теплоты перемѣнной температуры, отъ котораго она пріобрѣтаетъ теплоту въ опредѣленный періодъ измѣненія состоянія, то съ охлаждающимъ тѣломъ перемѣнной температуры, которому она отдаетъ теплоту.

Проведемъ двѣ изотермическія линіи T_1 и T_2 (фиг. 14) и двѣ адіабатическія μ_1 и μ_2, касающіяся круговаго процесса въ четырехъ точкахъ A, B, C, D, такъ что онъ будетъ описанъ круговымъ же процессомъ Карно.

По линіи ABC машина пріобрѣтаетъ теплоту, потому что функція μ увеличивается отъ точки A до C. Для безконечно малаго измѣненія получимъ:

$$dQ = T d\mu.$$

Означимъ чрезъ Q_2 всю теплоту, пріобрѣтенную по этому отрѣзку. Напротивъ того, по кривой CDA машина отдаетъ теплоту, потому что функція μ уменьшается, а $d\mu$ также какъ и dQ—оба отрицательные. Назовемъ чрезъ Q_1 теплоту, отданную по этому отрѣзку.

Температура возрастаетъ по пути DAB и понижается по BCD. Если проведемъ изотермическія линіи AF и CE чрезъ точки A и C, то окажется, что источникъ теплоты во время измѣненія состоянія AE имѣетъ низшую температуру, чѣмъ охлаждающее тѣло въ точкѣ C.

Для любаго круговаго процесса имѣемъ (n^o68):

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

Если выставить знакъ для dQ, то это уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$(1) \qquad \int_{ABC} \frac{dQ}{T} - \int_{CDA} \frac{dQ}{T} = 0$$

По кривой ABC температура T тѣла, измѣненія состояній котораго мы разсматриваемъ, будетъ ниже наибольшей температуры T_2 въ точкѣ B; отсюда слѣдуетъ, что

$$\int_{ABC} \frac{dQ}{T} > \int \frac{dQ}{T_2}$$

или, такъ какъ T_2 постоянная,—

$$\int_{ABC} \frac{dQ}{T} > \frac{Q_2}{T_2}$$

Наоборотъ, температура тѣла по CDA выше низшей T_1 въ точкѣ D. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\int\limits_{CDA} \frac{dQ}{T} < \int \frac{dQ}{T_1}$$

или

$$\int\limits_{CDA} \frac{dQ}{T} < \frac{Q_1}{T_1}$$

Такимъ образомъ, по уравненію (1),

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} < 0$$

или

$$\frac{Q_1}{Q_2} > \frac{T_1}{T_2}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$1 - \frac{Q_1}{Q_2} < 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

или

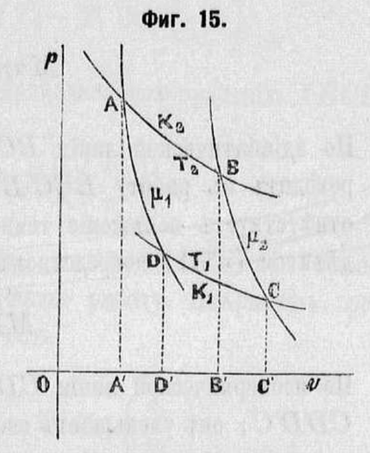
$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Слѣдовательно, коеффиціентъ экономіи машины, работающей по какому нибудь круговому процессу, менѣе того коеффиціента, когда машина работаетъ по круговому процессу Карно въ предѣлахъ температуръ T_2 и T_1. Такимъ образомъ самое выгодное превращеніе теплоты въ работу имѣетъ мѣсто при круговомъ процессѣ Карно, потому что при немъ коеффиціентъ экономіи наибольшій. Этотъ процессъ характеризуется тѣмъ, что источникъ теплоты доставляетъ машинѣ теплоту при постоянной температурѣ, а отдача ея охлаждающему тѣлу происходитъ также при одной и той же температурѣ.

Газовыя машины.

79. У газовой машины съ совершеннымъ газомъ впередъ можно вычислить точно всѣ обстоятельства, потому что извѣстны уравненія линій, опредѣляющихъ измѣненія состояній.

Фиг. 15.



Разсмотримъ газовую машину, работающую по круговому процессу Карно $ABCD$ (фиг. 15), и означимъ посредствомъ v_1, v_2, v'_2, v'_1 удѣльные объемы газа въ точкахъ A, B, C, D.

Здѣсь изотермическія линіи суть равнобочныя гиперболы ($n^0$59), а внутренняя энергія впродолженіе измѣненія состоянія при постоянной температурѣ остается неизмѣнною ($n^0$45). Вся теплота, доставляемая источникомъ по линіи AB, обращается въ работу, которая выражается площадью $ABB'A'$. — Пусть M будетъ вѣсъ газа, содержащагося въ машинѣ, а Q_2 — пріобрѣтенное по AB количество теплоты; тогда получимъ:

$$Q_2 = MT_2(\mu_2 - \mu_1)$$

Уравненіе адіабатическихъ линій для газовъ ($n^0$50) есть

$$\mu = \log(BT^c v^{C-c})$$

Отсюда слѣдуетъ для двухъ точекъ A и B:

$$\mu_2 - \mu_1 = (C - c) \log\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

а потому

$$Q_2 = MT_2(C - c) \log\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

или, замѣнивъ $C-c$ его значеніемъ $A\alpha p_0 v_0 (n^0 46)$,—

$$Q_2 = MA\alpha p_0 v_0 T_2 \log\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

При этомъ внѣшняя работа $ABB'A'$ будетъ

$$M\alpha p_0 v_0 T_2 \log\left(\frac{v_2}{v_1}\right).$$

По адіабатической линіи BC внутренняя энергія уменьшается и переходитъ въ работу $BCC'B'$. Этой потерѣ внутренней энергіи соотвѣтствуетъ пониженіе температуры $T_2 - T_1$, а величина ея опредѣлится ($n^0 51$) посредствомъ

$$MEc(T_2 - T_1)$$

По изотермической линіи CD газъ пріобрѣтаетъ внѣшнюю работу $CDD'C'$; онъ уменьшаетъ свой объемъ и отдаетъ охлаждающему тѣлу количество теплоты Q_1, опредѣляемое уравненіемъ

$$Q_1 = MA\alpha p_0 v_0 T_1 \log\left(\frac{v'_2}{v'_1}\right)$$

По предъидущему, для всякой машины, работающей по круговому процессу Карно, имѣемъ:

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$$

Чтобы это отношеніе удовлетворялось въ данномъ случаѣ, необходимо

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v'_2}{v'_1}$$

Наконецъ, по адіабатической линіи DA газъ пріобрѣтаетъ внѣшнюю работу $DAA'D'$, а внутренняя энергія увеличивается на

$$MEc(T_2 - T_1)$$

Отсюда слѣдуетъ, что внѣшняя работа, произведенная при расширеніи газа по адіабатической линіи BC, равна той работѣ, которая должна быть израсходована на поддержаніе хода машины во время втораго періода сжатія DA. Затраченное количество теплоты равно

$$Q_2 - Q_1 = MA\alpha p_0 v_0 (T_2 - T_1) \log\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

а произведенная работа, выражаемая криволинейною трапецію $ABCD$, есть

$$M\alpha p_0 v_0 (T_2 - T_1) \log\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

Легко показать, между прочимъ, что это слѣдствіе вѣрно: стоитъ только прямо вычислить внѣшнюю работу. Напримѣръ, работа, произведенная по линіи AB, есть

$$M\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = M\alpha p_0 v_0 T_2 \log\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

вслѣдствіе отношенія

$$pv = \alpha p_0 v_0 T_2$$

Это есть тоже самое значеніе, которое мы нашли ранѣе, основываясь на уравненіи адіабатическихъ линій.

Преобразователь теплоты.

80. Предположимъ теперь, что машина работаетъ по какому-нибудь круговому процессу въ предѣлахъ температуръ T_2 и T_1. Опишемъ его круговымъ же процессомъ Карно, который касался бы перваго въ точкахъ A, B, C, D (фиг. 16). Мы знаемъ ($n^0 78$), что коеффиціентъ экономіи въ данномъ процессѣ менѣе чѣмъ въ процессѣ Карно въ тѣхъ же предѣлахъ температуръ, а потому

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Въ практикѣ трудно осуществить круговой процессъ Карно, а потому стараются окольнымъ путемъ достигнуть наибольшей производительности, съ помощью преобразователя (Regenerator) теплоты.

Фиг. 16.

Проведемъ чрезъ точки прикосновенія C и A двѣ изотермическія линіи CE и AF; затѣмъ представимъ себѣ, что дуга AE раздѣлена на опредѣленное число элементовъ, и чрезъ точки дѣленія проведемъ изотермическія линіи; вслѣдствіе чего дуга CF также раздѣлится на равное число соотвѣтствующихъ элементовъ. Чтобы произвести измѣненіе состоянія вдоль элемента mn, — источникъ теплоты долженъ сообщить газу количество теплоты dq_2 при температурѣ T, а при соотвѣтствующемъ измѣненіи состоянія по элементу $m'n'$ машина должна отдать охлаждающему тѣлу количество теплоты dq_1. Такъ какъ пріобрѣтеніе и отдача этихъ обоихъ количествъ совершается при одной и той же температурѣ T, то можно представить себѣ внѣшнее тѣло при температурѣ T, которое пріобрѣтаетъ теплоту dq_1, освободившуюся во время измѣненія состоянія $m'n'$, и доставляетъ ее машинѣ, чтобы произвести соотвѣтствующее измѣненіе mn при той же температурѣ. Если количества теплоты dq_1 и dq_2 равны, то отданной по элементу $m'n'$ теплоты достаточно для измѣненія состоянія mn, а если кривыя CF и AE расположены такъ, что это условіе выполняется для всѣхъ соотвѣтствующихъ элементовъ, то отданная во время измѣненія состоянія CF теплота прямо будетъ служить для произведенія измѣненія AE безъ всякой затраты работы.

Такое постороннее тѣло, собирающее отданную теплоту по извѣстному отрѣзку измѣненія состояній, чтобы израсходовать ее по другому отрѣзку, называется **преобразователемъ теплоты.**

81. Такимъ образомъ источникъ доставляетъ теплоту только по линіи EBC, а машина отдаетъ ее только по линіи FDA.

Примѣненіе преобразователя сократило расходъ на теплоту, но все-таки коэффиціентъ экономіи при этомъ меньше, чѣмъ при круговомъ процессѣ Карно. — И такъ, для любаго круговаго процесса имѣемъ уравненіе (n⁰ 68):

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

Выставивъ знаки у различныхъ членовъ этой суммы, соотвѣтствующихъ отдѣльнымъ частямъ разсматриваемаго круговаго процесса, получимъ:

$$\int \frac{dQ}{T} = \int\limits_{AE} \frac{dq_2}{T} + \int\limits_{EBC} \frac{dQ_2}{T} - \int\limits_{CF} \frac{dq_1}{T} - \int\limits_{FDA} \frac{dQ_1}{T} = 0$$

Такъ какъ температура для всѣхъ соотвѣтствующихъ элементовъ mn и $m'n'$ одна и таже, и такъ какъ мы предположили, что количества теплоты dq_1 и dq_2 равны, то получимъ:

$$\int\limits_{AE} \frac{dq_2}{T} = \int\limits_{CF} \frac{dq_1}{T}$$

и предъидущее уравненіе будетъ:

$$\int\limits_{EBC} \frac{dQ_2}{T} = \int\limits_{FDA} \frac{dQ_1}{T} = 0$$

Но по EBC температура ниже T_2, а по FDA она выше T_1, поэтому

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} < 0$$

или

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

82. Разсматриваемый круговой процессъ можно измѣнять такъ,

что коэффиціентъ экономіи дѣйствительно достигнетъ наибольшаго своего значенія. Для этого достаточно, чтобы температура на линіяхъ EBC и FDA была постоянна, т. е чтобы обѣ эти линіи были изотермическими. Эта задача допускаетъ безконечное число рѣшеній.

Представимъ круговой процессъ посредствомъ двухъ какихъ нибудь изотермическихъ линій BC и AD (фиг. 17), которымъ соотвѣтствуютъ температуры T_2, T_1; — посредствомъ произвольной линіи AB, и замкнемъ его четвертою линіею CD такого свойства, чтобы пріобрѣтенное и отданное количества теплоты на двухъ соотвѣтствующихъ элементахъ линій AB и CD были равны; тогда получимъ:

Фиг. 17.

$$o=\int_{BC}\frac{dQ_2}{T}-\int_{DA}\frac{dQ_1}{T}=\frac{Q_2}{T_2}-\frac{Q_1}{T_1}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{Q_2-Q_1}{Q_2}=\frac{T_2-T_1}{T_2}$$

Поэтому, такой круговой процессъ будетъ также выгоденъ, какъ и процессъ Карно, только онъ требуетъ примѣненія преобразователя теплоты.

Если дана линія AB, то CD опредѣлится условіемъ, которое приложимо къ каждому изъ соотвѣтствующихъ элементовъ mn и $m'n'$, а именно уравненіемъ:

$$dq_1=dq_2$$

Означимъ черезъ v и p координаты точки m, а черезъ v' и p' — координаты точки m'; тогда получимъ (n^0 40):

$$dq_2=M\ (cdt+ldv)$$

или ($n^0$47)

$$dq_2=M\ (cdt+Apdv)$$

Такъ какъ теплоемкость c не зависитъ отъ объема (n^0 45), а измѣненіе температуры для обоихъ элементовъ одно и тоже, то такимъ же образомъ получимъ:

$$dq_1=M\ (cdt+Ap'dv')$$

и искомое условіе будетъ:

$$pdv=p'dv'$$

Точки m и m' принадлежатъ изотермической линіи, а потому можно приложить законъ Маріотта: $pv=p'v'$; слѣдовательно

$$\frac{dv}{v}=\frac{dv'}{v'}$$

Отсюда

$$v=v'k$$

или также

$$p=\frac{p'}{k}$$

гдѣ k означаетъ произвольное число.

Такимъ образомъ, если извѣстно уравненіе $\varphi\ (v,p)$ линіи AB, то достаточно замѣнить въ немъ v и p предъидущими значеніями, чтобы получить уравненіе линіи CD, т. е. $\varphi\left(kv',\frac{p'}{k}\right)=o.$

Машина Штирлинга.

83. Въ машинѣ Штирлинга, выполняющей предъидущія условія, линія AB — прямая, параллельная оси $0p$ (фиг. 18), и уравненіе ея есть

$$v-v_1=0$$

Затѣмъ, уравненіе линіи CD будетъ

$$kv'-v_1=0$$

или

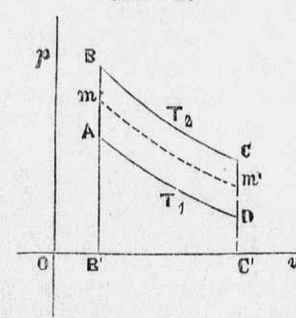
$$v' = \frac{v_1}{k} = v_2$$

Слѣдовательно, эта линія также прямая, параллельная оси Op. Впрочемъ, легко понять, что двѣ линіи, параллельныя Op, удовлетворяютъ условіямъ задачи, потому что въ данномъ случаѣ для двухъ элементовъ m и m', лежащихъ между двумя изотермическими линіями, имѣемъ:

$$dq_2 = dq_1 = Mcdt$$

Въ этой машинѣ топильное пространство сообщаетъ газу теплоту по изотермической линіи BC, которая (теплота) и превращается во внѣшнюю работу. По линіи CD газъ охлаждается при постоянномъ объемѣ, не производя при этомъ внѣшней работы, и отдаетъ теплоту преобразователю. По изотермической линіи DA расходуется часть произведенной работы на сжатіе газа, для приведенія его къ первоначальному объему; въ это же самое время онъ отдаетъ охлаждающему тѣлу извѣстное количество теплоты, которое и теряется, потому что это происходитъ при самой низкой температурѣ, которую принимаетъ машина. Наконецъ, по линіи AB газъ снова нагрѣвается при постоянномъ объемѣ и приходитъ къ первоначальному своему давленію при помощи теплоты, доставляемой ему преобразователемъ.

Фиг. 18.



Машина Эриксона.

84. Въ первой машинѣ Эриксона задача рѣшается подобнымъ же образомъ.

Здѣсь линія AB—прямая, параллельная оси Ov (фиг. 19), и уравненіе которой

$$p - p_2 = 0$$

Уравненіе же линіи CD —

$$\frac{p'}{k} - p_2 = 0$$

или

$$p' = kp_2 = p_1$$

Слѣдовательно, она также прямая, параллельная Ov. Топильное пространство доставляетъ теплоту по изотермической линіи BC, а охлаждающее тѣло пріобрѣтаетъ ее по изотермической линіи DA. Здѣсь имѣетъ мѣсто возстановленіе теплоты посредствомъ преобразователя при постоянномъ давленіи, между тѣмъ какъ въ машинѣ Штирлинга оно происходитъ при постоянномъ объемѣ.

Фиг. 19.

Легко видѣть, что существуетъ взаимное уравниваніе между теплотою, пріобрѣтенною преобразователемъ по линіи CD, и теплотою, отданною имъ газу по линіи AB.

Поэтому вообще ($n^\circ 41$)

$$dq = M(Cdt + hdp)$$

При измѣненіяхъ состояній, совершающихся при постоянномъ давленіи, членъ hdp равенъ нулю; вслѣдствіе чего пріобрѣтеніе и потеря теплоты по двумъ соотвѣтствующимъ элементамъ m и m' на линіяхъ AB и CD равны, т. е.

$$dq_2 = dq_1 = MCdt.$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Изслѣдованіе паровъ.

Насыщенные пары.—Измѣненіе состояній смѣси жидкости и пара.—Уравненіе Клаузіуса.—Уравненіе В. Томсона.—Плотность насыщенныхъ паровъ.—Теплоемкость насыщеннаго пара. — Сгущеніе при расширеніи водянаго пара.—Внутренняя энергія смѣси жидкости и пара.—Измѣненіе состоянія смѣси жидкости и пара по адіабатической линіи.—Работа при расширеніи.

Насыщенные пары.

85. Если постепенно уменьшать объемъ сухаго пара, подвергая его все большему и большему давленію и, при томъ, поддерживая въ немъ постоянную температуру, то достигнемъ, наконецъ, такого предѣла давленія, за который перейдти уже нельзя. Съ того момента, когда достигнуто наибольшее давленіе, паръ называется насыщеннымъ. Если продолжать уменьшеніе объема, то часть пара обращается въ жидкость, а давленіе остается неизмѣннымъ. Это наибольшее давленіе пара при данной температурѣ зависитъ отъ природы вещества. Оно есть функція температуры, которую означимъ черезъ

(1) $$p=F(t)$$

Далѣе, если подвергнуть паръ постоянному давленію p и постепенно уменьшать температуру, то достигнемъ такого предѣла ея, за который уже нельзя перейдти. Коль скоро достигнута такая температура,—паръ будетъ насыщеннымъ. Если продолжать отнятіе теплоты,

то онъ частью переходитъ въ капельно-жидкое состояніе, и пока еще паръ существуетъ—температура остается неизмѣнною.—Представимъ себѣ уравненіе (1) разрѣшеннымъ относительно t; тогда наименьшая температура пара при данномъ давленіи опредѣлится изъ

(2) $$t=\varphi(p)$$

Уравненія (1) и (2) опредѣляютъ давленіе насыщеннаго пара при температурѣ t, или, наоборотъ,—температуру его при давленіи p.

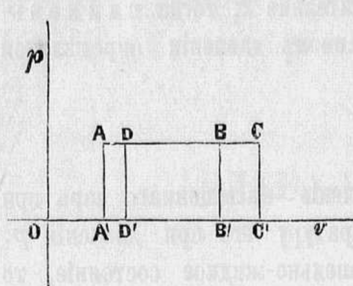
86. Если паръ переходитъ въ капельно-жидкое состояніе, то онъ освобождаетъ теплоту. Подъ скрытою теплотою испаренія разумѣется такое количество ея L, которое долженъ отдать одинъ килограммъ насыщеннаго пара, для того чтобы перейдти въ капельно-жидкое состояніе при постоянномъ давленіи, а, слѣдовательно, и при постоянной температурѣ. Это количество зависитъ отъ природы вещества и есть функція температуры, при которой совершается переходъ въ новое состояніе.

87. Наоборотъ, если капельную жидкость нагрѣвать при постоянномъ давленіи p, то она вообще приходитъ въ кипѣніе при температурѣ t, опредѣляемой уравненіемъ (2). Въ то время какъ переходъ въ капельно-жидкое состояніе составляетъ легко предвидимое явленіе, которое, при данномъ давленіи, происходитъ всегда при одной и той же температурѣ,—обратное явленіе, т. е. испареніе, совершается гораздо менѣе правильно; а именно, наблюдали, что если нагрѣваемая жидкость не имѣетъ свободной поверхности, то температуру ея при давленіи p можно возвысить до $t+\theta$, которая будетъ больше постоянной температуры t насыщеннаго пара. Если теперь заставить жидкость испаряться, то поглощаемая ею скрытая теплота L' будетъ уже не та, которую она поглотила бы во время кипѣнія при нормальныхъ условіяхъ.

Разсмотримъ кипящую жидкость при нормальныхъ условіяхъ, при давленіи p и температурѣ t. При этомъ объемъ ея значительно увеличится, а такъ какъ впродолженіе явленія давленіе постоянно, то измѣненіе состояній выразится прямою AB, параллельною оси

Ov (фиг. 20). Если теперь возвысимъ температуру этого пара до $t+\theta$ при томъ же самомъ давленіи, то объемъ его нѣсколько увеличится, и онъ сдѣлается перегрѣтымъ. Это новое измѣненіе выразится прямою BC. Означимъ черезъ C и C' теплоемкости жидкости и пара при постоянномъ давленіи. Для перехода AB въ паръ при обыкновенномъ кипѣніи необходимо количество теплоты L, а для нагрѣванія BC пара при неизмѣнномъ давленіи — количество $\int_t^{t+\theta} C'dt$;

Фиг. 20.



поэтому все количество теплоты, которое должно сообщить одному килограмму жидкости для перехода ея изъ состоянія A въ C, будетъ

$$L+\int_t^{t+\theta} C'dt$$

Наоборотъ, предположимъ теперь, что жидкость при температурѣ t, не испаряясь, нагрѣвается при постоянномъ давленіи до $t+\theta$; тогда объемъ ея немного увеличится, и она перейдетъ изъ состоянія A въ D. Пусть при этомъ она медленно испаряется подъ давленіемъ p и затѣмъ приходитъ въ тоже конечное состояніе C. Вся теплота, пріобрѣтенная при этомъ второмъ способѣ превращенія, будетъ

$$\int_t^{t+\theta} Cdt+L'$$

Оба количества теплоты равны между собою, такъ какъ внѣшняя работа $ACC'A'$ для обоихъ превращеній одна и таже, а измѣненіе внутренней энергіи также одинаково, потому что начальное и

конечное состоянія въ обоихъ случаяхъ тожественны. Такимъ образомъ

$$L+\int_t^{t+\theta} C'dt=\int_t^{t+\theta} Cdt+L'$$

Отсюда

$$L'=L-\int_t^{t+\theta} (C-C')dt$$

Однако, опытъ показываетъ, что теплоемкости всѣхъ жидкостей больше теплоемкостей ихъ паровъ, и что эта разница уменьшается близь точки кипѣнія, слѣдовательно $C'<C$, а потому $L'<L$. Напримѣръ, для воды

$$C=1,\ C'=0{,}4805$$

Отсюда слѣдуетъ заключить, что если жидкость приходитъ въ кипѣніе при опредѣленномъ давленіи, то самая бóльшая скрытая теплота будетъ та, которая соотвѣтствуетъ кипѣнію при нормальныхъ условіяхъ.

88. Посредствомъ наблюденій Реньо опредѣлилъ скрытую теплоту испаренія L для ряда жидкостей при различныхъ температурахъ и результаты этихъ изслѣдованій выразилъ эмпирическими формулами [1]). Онъ нашелъ для воды

$$L=606{,}50-0{,}695t-0{,}00002t^2-0{,}0000003t^3$$

для эфира

$$L=94{,}00-0{,}07901t-0{,}0008514t^2$$

Вслѣдствіе большаго приращенія объема, скрытая теплота производитъ весьма значительную внѣшнюю работу $ABB'A'$, бóльшая часть которой расходуется на увеличеніе внутренней энергіи жидкости, для того чтобы она могла превратиться въ паръ.—Пусть u означа-

[1]) Regnault, Mèmoires de l'Académie. T. XXI.

етъ удѣльный объемъ жидкости при температурѣ t, u'—удѣльный объемъ насыщеннаго пара при той же температурѣ, и допустимъ, что превращеніе совершилось при постоянномъ давленіи p. Тогда внѣшняя работа будетъ $p(u'-u)$ и, слѣдовательно,

$$EL = \Delta U + p(u'-u)$$

или

$$A\Delta U = L - Ap(u'-u)$$

Если вычислить ее для воды и эфира, выражая давленіе p насыщеннаго пара посредствомъ температуры t, при которой совершается испареніе, то получимъ: для воды

$$Ap\,(u'-u) = 31,10 + 0,096t - 0,000\,02t^2 - 0,000\,000\,3t^3$$

$$A\Delta U = 575,40 - 0,791t$$

для эфира

$$Ap\,(u'-u) = 7,46 + 0,02747t - 0,0001354t^2$$

$$A\Delta U = 86,54 - 0,10648t - 0,0007160t^2$$

Измѣненіе состояній смѣси жидкости и пара.

89. Разсмотримъ смѣсь жидкости и насыщеннаго пара, полный вѣсъ которой при температурѣ t равняется одному килограмму. Пусть x будетъ вѣсъ пара въ смѣси, $1-x$ — вѣсъ жидкости, u и u' — удѣльные объемы жидкости и пара, а v — объемъ смѣси; тогда

$$(3) \qquad v = u\,(1-x) + u'x = u + (u'-u)x$$

Такъ какъ четыре величины u, u', p, L суть функціи одной только температуры, а v — функція t и x, то мы можемъ взять за перемѣнныя независимыя t и x. Если теперь станемъ разсматривать безконечно малое измѣненіе состоянія, при которомъ смѣсь переходитъ изъ (t, x) въ состояніе $(t+dt, x+dx)$, то необходимая для такого измѣненія теплота расходуется: 1) на нагрѣваніе вѣса $1-x$ жидкости, 2) на нагрѣваніе вѣса x пара и 3) на обращеніе вѣса dx жидкости въ паръ; поэтому

$$dQ = (1-x)\,(Cdt + hdp) + x\,(C'dt + h'dp) + Ldx$$

Такъ какъ давленіе p есть функція одной только температуры, то вмѣсто dp можно вставить $\frac{dp}{dt}dt$ и привести уравненіе къ виду:

$$dQ = (1-x)\left(C + h\frac{dp}{dt}\right)dt + x\left(C' + h'\frac{dp}{dt}\right)dt + Ldx$$

Для сокращенія положимъ, что

$$m = C + h\frac{dp}{dt}$$

$$m' = C' + h'\frac{dp}{dt}$$

Величины C, h, m, C', h', m' зависятъ только отъ температуры, потому что онѣ относятся къ насыщенному состоянію, соотвѣтствующему температурѣ t. Коэффиціентъ m' называется **теплоемкостью сухаго, насыщеннаго пара**. Въ то самое время какъ температура возвышается — давленіе увеличивается такимъ образомъ, что паръ остается насыщеннымъ, и, при томъ, не появляется частнаго сгущенія.

Такимъ образомъ для предъидущаго уравненія получимъ теперь:

$$dQ = [m\,(1-x) + m'x]\,dt + Ldx$$

или

$$(4) \qquad dQ = [m + (m'-m)\,x]\,dt + Ldx$$

Далѣе, изъ уравненія (3) выходитъ:

$$dv = \frac{du}{dt}dt + x\,\frac{d\,(u'-u)}{dt}dt + (u'-u)\,dx$$

и, слѣдовательно, для произведенной внѣшней работы

$$ds = pdv$$

получимъ выраженіе:

$$ds = p\left[\left(\frac{du}{dt} + x\,\frac{d(u'-u)}{dt}\right)dt + (u'-u)\,dx\right]$$

Наконецъ, изъ перваго главнаго уравненія

$$(a) \qquad dQ = A\,(dU + pdv)$$

для измѣненія внутренней энергіи слѣдуетъ:

$$(5) \qquad AdU = \left[m + (m'-m)\,x - Ap\,\frac{du}{dt} - Apx\,\frac{d\,(u'-u)}{dt}\right]dt + \left[L - Ap\,(u'-u)\right]dx$$

Уравненіе Клаузіуса.

90. Теперь мы пойдемъ тѣмъ же самымъ путемъ, который избрали въ n^0 39. Внутренняя энергія смѣси жидкости и пара есть опредѣленная функція двухъ перемѣнныхъ t и x, которыми опредѣляется состояніе смѣси. Уравненіе (5) даетъ полный дифференціалъ этой функціи, а вмѣстѣ съ тѣмъ и двѣ частныя производныя перваго порядка, поэтому

$$A\,\frac{dU}{dt} = m + (m'-m)x - Ap\,\frac{du}{dt} - Apx\,\frac{d(u'-u)}{dt}$$

$$A\,\frac{dU}{dx} = L - Ap\,(u'-u)$$

Отсюда

$$A\,\frac{d^2U}{dt\,dx} = m' - m - Ap\,\frac{d(u'-u)}{dt}$$

$$A\,\frac{d^2U}{dx\,dt} = \frac{dL}{dt} - A\,(u'-u)\,\frac{dp}{dt} - Ap\,\frac{d(u'-u)}{dt}$$

Такъ какъ оба эти значенія равны, то получится отношеніе [1]):

$$(\alpha) \qquad \frac{dL}{dt} + m - m' = A\,(u'-u)\,\frac{dp}{dt}$$

Уравненіе В. Томсона.

91. Далѣе, уравненіе (4) даетъ:

$$(6) \qquad \frac{dQ}{T} = \frac{m + (m'-m)\,x}{T}\,dT + \frac{L}{T}\,dx$$

Но, вслѣдствіе втораго начала (n^0 67),

$$\frac{dQ}{T} = d\mu.$$

правая часть уравненія (6) есть полный дифференціалъ функціи μ обѣихъ перемѣнныхъ независимыхъ T и x. Отсюда слѣдуетъ отношеніе:

$$(\beta) \qquad \frac{d\left(\frac{L}{T}\right)}{dT} = \frac{m'-m}{T}$$

которое можно привести къ виду

$$(\beta_1) \qquad \frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + m' - m$$

Наконецъ, сочетаніе обоихъ уравненій (α) и (β_1) приводитъ къ третьему отношенію:

$$(\gamma) \qquad \frac{L}{T} = A\,(u'-u)\,\frac{dp}{dT}$$

[1]) Clausius, Pogg. Ann. Bd. XCVII, S. 441, или Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie von R. Clausius. Braunschweig, 1864. Erste Abtheilung, S. 172.

92. Если подставимъ въ уравненіе (6) вмѣсто $m' - m$ его значеніе изъ уравненія (β), то получимъ:

$$\frac{dQ}{T} = \frac{m}{T} dT + xd\left(\frac{L}{T}\right) + \frac{L}{T} dx$$

или

$$(7) \qquad d\mu = \frac{dQ}{T} = \frac{m}{T} dT + d\left(\frac{Lx}{T}\right)$$

Такъ какъ величина m — функція одной только температуры, то ясно, что правая часть есть полный дифференціалъ. Посредствомъ интегрированія получимъ:

$$\mu = \frac{Lx}{T} + \int_{T_0}^{T} \frac{m}{T} dT$$

Если здѣсь смотрѣть на μ какъ на постоянную, то это уравненіе будетъ представлять уравненіе адіабатическихъ линій.

Предъидущія уравненія приводятъ къ важнымъ слѣдствіямъ, которыя мы и разсмотримъ одно за другимъ.

Плотность насыщенныхъ паровъ.

93. Изъ уравненія (γ) слѣдуетъ:

$$(8) \qquad u' - u = \frac{EL}{T\frac{dp}{dT}}$$

Скрытая теплота L и давленіе p насыщеннаго пара суть функціи температуры, которыя для нѣкоторыхъ жидкостей были опредѣлены Реньо опытнымъ путемъ. Такимъ образомъ изъ уравненія (8) можно вычислить $u' - u$. Далѣе, такъ какъ удѣльный объемъ u жидкости можно разсматривать постояннымъ, то, слѣдовательно, опре-

дѣлится удѣльный объемъ u' пара, а, значитъ, и его плотность. Вычисленные Клаузіусомъ для пара результаты суть: [1])

t	u' вычисленное	u' наблюденное	u' по закону Маріотта
58,21	8,23	8,27	8,33
92,66	2,11	2,15	2,18
117,17	0,974	0,941	0,991
144,74	0,437	0,432	0,466

Значенія u' опредѣлены опытнымъ путемъ Ферберномъ и Тетомъ [2]). Ясно, что они очень хорошо согласуются съ тѣми, которыя вытекаютъ изъ теоріи, и что они немного меньше тѣхъ значеній, которыя получаются изъ приложенія къ парамъ закона Маріотта, чѣмъ мы уже и пользовались раньше.

94. Величины p и u' — обѣ функціи температуры, слѣдовательно онѣ функціи одна другой. Цейнеръ [3]) нашелъ, что существующее между этими двумя функціями отношеніе выражается довольно точно уравненіемъ:

$$pu'^n = b$$

Для водяного пара обѣ постоянныя n и b имѣютъ слѣдующія значенія:

$$n = 1{,}0646$$
$$b = 1{,}704$$

Изобразивъ это уравненіе графически кривою L (фиг. 21), полу-

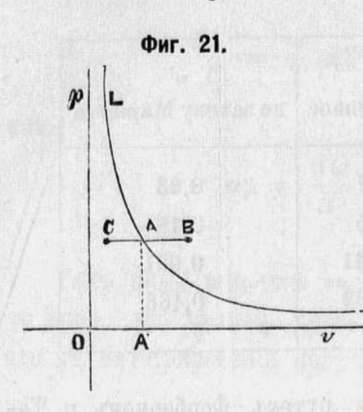
[1]) Въ концѣ разсужденія Клаузіуса, Pogg. Ann. Bd. XCVII, S. 441 и 513, о значеніяхъ p, $\frac{dp}{dT}$ и $T\frac{dp}{dT}$ приведена подробная таблица. Результаты находятся въ Abhandlungen über die mech. Wärmetheorie. Braunschweig, 1864. Erste Abtheilung, S. 89.

[2]) Philosophical Magazine 4-th Ser. Vol. XXI.

[3]) Zeuner, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. 2-te Auflage. Leipzig, 1866, S. 294 и 302.

чимъ родъ гиперболы, представляющей линію измѣненія состояній насыщеннаго пара.

Фиг. 21.



Легко видѣть, что всякая точка B, лежащая вправо отъ линіи L, означаетъ состояніе перегрѣтаго пара, между тѣмъ какъ лежащая влѣво точка C указываетъ частное сгущеніе; поэтому въ A, на самой линіи L, паръ будетъ насыщенный и сухой. Положимъ, что въ то время какъ давленіе не измѣняется — температура становится все выше и выше; тогда объемъ увеличится, и паръ будетъ стремиться принять всѣ свойства совершеннаго газа. Перегрѣваніе пара, при постоянномъ давленіи, изобразится прямою AB, параллельною оси Ov. Наоборотъ, если отнимать теплоту, въ то время какъ давленіе не измѣняется, то произойдетъ частное сгущеніе, а объемъ будетъ все болѣе и болѣе уменьшаться. Такъ какъ при этомъ превращеніи температура остается постоянною, то прямая AC, параллельная оси Ov, будетъ изотермическою линіею для смѣси пара и жидкости.

Теплоемкость насыщеннаго пара.

95. Мы только что опредѣлили удѣльный объемъ u' насыщеннаго пара посредствомъ скрытой теплоты и давленія; но знаніе скрытой теплоты достаточно и для опредѣленія теплоемкости m' насыщеннаго пара.

Для этого воспользуемся уравненіемъ (β) въ n^0 91, которое для разности $m'-m$ дастъ:

$$m'-m=T\frac{d\left(\frac{L}{T}\right)}{dT} \qquad (9)$$

Далѣе, не сдѣлавъ чувствительной ошибки, мы можемъ замѣнить

коеффиціентъ m теплоемкостью жидкости C, потому что коеффиціентъ h для всѣхъ жидкостей весьма малъ, вслѣдствіе незначительной ихъ сжимаемости; такимъ образомъ найдемъ m'.

Жидкости можно раздѣлить на три класса. Для перваго — значеніе m' отрицательное, для втораго — положительное и, наконецъ, для третьяго — значеніе m' будетъ отрицательное ниже извѣстной температуры и положительное — выше ея.

Общее уравненіе

$$dQ = c\,dt + l\,dv$$

для пара, остающагося всегда насыщеннымъ и сухимъ, переходитъ въ

$$dQ=\left(c'+l'\frac{du'}{dT}\right)dT$$

потому что при этомъ существуетъ только одна перемѣнная независимая T. Отсюда

$$m'=c'+l'\frac{du'}{dT}$$

Когда температура увеличивается, то удѣльный объемъ насыщеннаго пара уменьшается, и, слѣдовательно, производная $\frac{du'}{dT}$ — отрицательная. Поэтому правая часть уравненія состоитъ изъ двухъ сравнимыхъ по величинѣ членовъ съ противоположными знаками *). Ясно, что значеніе m', смотря по обстоятельствамъ, можетъ быть положительнымъ, или отрицательнымъ. Вотъ результаты, вычисленные Клаузіусомъ.

---

*) Подъ выраженіемъ сравнимые члены слѣдуетъ понимать такіе, изъ которыхъ величиною одного нельзя пренебречь сравнительно съ величиною другаго. *Прим. перев.*

	t	m'
Водяной паръ	58°,21	—1,398
	92,66	—1,266
	117,17	—1,107
	144,74	—0,807
Сѣрнистый углеродъ	0	—0,184
	80	—0,164
	160	—0,157
Эфирный паръ	0	+0,116
	40	+0,120
	80	+0,128
	120	+0,133

Изъ этой таблицы видно, что водяной паръ и сѣрнистый углеродъ принадлежатъ къ первому классу: у нихъ теплоемкость насыщеннаго пара отрицательная и абсолютная величина ея уменьшается по мѣрѣ возрастанія температуры. Пары эфира принадлежатъ ко второму классу, потому что здѣсь значеніе m' положительное и увеличивается съ температурою. Къ третьему классу принадлежатъ бензинъ, хлороформъ и хлористый углеродъ. Во всѣхъ случаяхъ относительное значеніе m' увеличивается вмѣстѣ съ температурою, и потому приблизительно можно положить для всѣхъ жидкостей, что теплоемкость ихъ насыщеннаго пара, ниже извѣстной температуры, — отрицательная, а выходя изъ нея, становится положительною и постоянно возрастаетъ. Числа предъидущей таблицы, повидимому, показываютъ, что этотъ предѣлъ температуры для водянаго пара не особенно высокъ.

Сгущеніе при расширеніи водянаго пара.

96. Знакъ m' имѣетъ большое значеніе при разсматриваніи паровыхъ машинъ. Предположимъ, что паръ испытываетъ безконечно малое измѣненіе, оставаясь насыщеннымъ и сухимъ; тогда необходимое для такого измѣненія количество теплоты будетъ

$$dQ = m'dt$$

или

$$dQ = m'\frac{dt}{du'}\,du' = \frac{m'}{\left(\frac{du'}{dt}\right)}\,du'$$

Но производная $\frac{du'}{dt}$ постоянно отрицательная; тоже самое относится и къ значенію m' для водянаго пара; слѣдовательно, для него dQ и du' имѣютъ одни и тѣже знаки.

Разсмотримъ теперь одинъ килограммъ насыщеннаго и сухаго пара, имѣющаго при опредѣленной температурѣ t объемъ u'. Сожмемъ его, предполагая, что онъ останется такимъ же сухимъ и насыщеннымъ; тогда измѣненіе du', а слѣдовательно и dQ, будутъ отрицательными, т. е. паръ отдастъ теплоту. Но если сжатіе происходитъ довольно быстро, такъ что освободившаяся теплота не успѣетъ передаться внѣшнимъ тѣламъ, то она перегрѣетъ паръ и выведетъ его изъ предѣла насыщенія; при этомъ говорятъ, что паръ перегрѣтъ посредствомъ сжатія.

Наоборотъ, если предположимъ, что насыщенный водяной паръ расширится, то du' и dQ будутъ оба положительные; слѣдовательно, въ данномъ случаѣ будетъ пріобрѣтаться теплота. Такимъ образомъ, если пожелаемъ увеличить объемъ сухаго и насыщеннаго пара, оставляя его такимъ же, то необходимо доставить ему теплоту. Если расширеніе произойдетъ такъ быстро, что внѣшнія тѣла не успѣютъ передать ему необходимую теплоту, то такое состояніе будетъ подобно тому, какъ если бы мы сообщили насыщенному и сухому пару такое количество теплоты, что объемъ его перешелъ въ $u' + du'$, а потомъ снова отняли бы ее, оставляя тотъ же самый объемъ $u' + du'$. При этомъ, очевидно, произойдетъ частное сгущеніе, и, слѣдовательно, при расширеніи водяной паръ частью сгущается.

Для паровъ эфира m' съ противоположнымъ знакомъ, и явленія

будутъ обратныя: сжатіе произведетъ частное сгущеніе, а расширеніе — перегрѣтый паръ.

97. Съ теоретической стороны сгущеніе водяного пара при расширеніи было почти одновременно указано Клаузіусомъ [1]) и Ранкиномъ [2]). Справедливость этого факта Гирнъ доказалъ опытнымъ путемъ. Для этого онъ переводилъ насыщенный и сухой паръ, находившійся подъ бо́льшимъ давленіемъ, чѣмъ атмосферное, въ прозрачный цилиндръ, закрывавшійся двумя стеклянными пластинками. Какъ только было установлено сообщеніе съ атмосферой посредствомъ открытія крана, — тотчасъ же происходило быстрое расширеніе; паръ частью сгущался, и въ цилиндрѣ образовалось непрозрачное облако изъ жидкихъ капель.

Гирнъ произвелъ также и обратный опытъ надъ парами эфира. Онъ наполнялъ сухимъ и насыщеннымъ эфирнымъ паромъ шаръ, сообщавшійся съ цилиндромъ, въ которомъ могъ двигаться поршень. Если поршень въ цилиндрѣ быстро опускался, то паръ сжимался, и образовалось облако, указывавшее на частное его сгущеніе [3]).

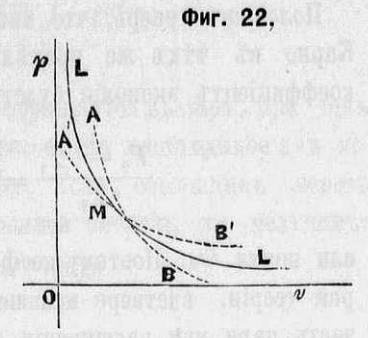
Эти результаты могутъ быть изображены геометрически. Положимъ, что кривая LL (фиг. 22) есть линія насыщеннаго водяного пара. Если проведемъ адіабатическую линію AB, то она пересѣчетъ первую какъ показываетъ фигура. Въ M паръ насыщенъ и сухъ. Если его сжать, не отдавая и не пріобрѣтая теплоты, то, какъ видѣли, онъ будетъ перегрѣтъ; поэтому часть MA адіабатической линіи лежитъ передъ L. Напротивъ, если паръ расширится безъ отдачи и пріобрѣтенія теплоты, то произойдетъ частное сгущеніе; слѣдовательно, отрѣзокъ MB адіабатической линіи лежитъ сзади L. Для паровъ эфира адіабатическая линія $A'B'$ пройдетъ совершенно обратно.

[1]) Clausius, Pogg. Ann. Bd. 79. S. 368 и 500.

[2]) Rankine, Transactions of the Royal Soc. of Edinburgh. Vol. XX. Pt. I, pag. 147. Въ извлеченіи Pogg. Ann. Bd. 81, S. 172.

[3]) Hirn, Confirmation expérimentale de la seconde proposition de la theorie mécanique de la chaleur et des équations, qui en découlent. Cosmos XII. Année, 22-e vol.

Фиг. 22.



98. Прежде не знали такого сгущенія водяного пара при расширеніи его въ машинахъ, а потому пришли къ совершенно ошибочнымъ результатамъ относительно производительности этихъ машинъ. — Предположимъ, что въ цилиндрѣ находится сухой и насыщенный паръ, и что сообщеніе съ паровымъ котломъ прервано въ то время, когда поршень прошелъ только часть своего пути: тогда паръ расширится, часть его сгустится и во время сгущенія освободитъ теплоту, которая перейдетъ въ работу; а въ этомъ-то и заключается главный источникъ работы машинъ.

Разсмотримъ, напримѣръ, машину высокаго давленія, паровой котелъ которой имѣетъ температуру 152^0, а конденсаторъ 40^0. Предположимъ, что произойдетъ полное расширеніе, т. е. что паръ будетъ испытывать давленіе, равное наибольшему его давленію при 40^0. Количество теплоты, необходимое для переведенія одного килограмма воды отъ 0^0 до t^0 и, затѣмъ, для обращенія ея въ паръ, будетъ

$$Q = Ct + L$$

Если замѣнить здѣсь L его значеніемъ, даннымъ Реньо (n° 88), то приблизительно получится:

$$Q = 606{,}50 + 0{,}305\, t \qquad (10)$$

Если $t = 152^0$, то $Q = 653$. Но такъ какъ температура воды, питающей котелъ, равна 40^0, то расходъ теплоты для одного килограмма пара будетъ 613 единицъ. Если бы паръ не испытывалъ частнаго сгущенія во время своего расширенія, а достигалъ конденсатора насыщеннымъ и сухимъ при 40^0, то онъ, сгустившись при этой температурѣ, освободилъ бы 579 единицъ теплоты. Разность, а именно 34 калоріи, обратилась бы въ работу, и коэффи-

ціентъ экономіи былъ бы только $\frac{34}{613}$ или приблизительно $\frac{1}{18}$.

Положимъ теперь, что машина работаетъ по круговому процессу Карно въ тѣхъ же предѣлахъ температуры, 152^0 и 40^0; тогда коэффиціентъ экономіи будетъ

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{112}{273 + 152} = \frac{112}{425}$$

или почти $1/4$. Поэтому коэффиціентъ экономіи, вычисленный по старой теоріи, вчетверо меньше, и, слѣдовательно, оказывается, что часть пара при расширеніи сгущается, а освободившаяся при частномъ сгущеніи теплота переходитъ въ работу.

Внутренняя энергія смѣси жидкости и пара.

99. Означимъ черезъ U_0 внутреннюю энергію киллограмма жидкости при температурѣ T_0 и при соотвѣтствующемъ давленіи p_0. Станемъ нагрѣвать эту жидкость до температуры T при перемѣнномъ давленіи p и будемъ наблюдать, чтобы въ каждый моментъ испытываемое жидкостью давленіе равнялось наибольшей упругости пара при соотвѣтствующей температурѣ; кромѣ того, предположимъ, что не образуется пара, если, напримѣръ, жидкость заключена въ цилиндръ, поршень котораго имѣетъ такое положеніе, что дозволяетъ жидкости только расширяться; тогда необходимая для такого измѣненія теплота будетъ

$$\int_{T_0}^{T} m dt$$

Изъ перваго главнаго уравненія

$$E\int_{T_0}^{T} mdt = \Delta U + \int_{p_0}^{p} pdu$$

слѣдуетъ:

$$\Delta U = E\int_{T_0}^{T} mdt - \int_{p_0}^{p} pdu$$

Предположимъ, что вѣсъ x жидкости обращается въ паръ, при чемъ поддерживается постоянная температура; тогда необходимое для испаренія количество теплоты будетъ Lx. Если обозначимъ черезъ $\Delta' U$ соотвѣтствующее измѣненіе внутренней энергіи, то получимъ:

$$ELx = \Delta' U + p(u' - u)x$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\Delta' U = ELx - p(u' - u)x$$

Очевидно, что измѣненіе внутренней энергіи смѣси равно $\Delta U + \Delta' U$, а потому, называя черезъ U внутреннюю ея энергію, получимъ:

$$U - U_0 = E(Lx + \int_{T_0}^{T} m\,dt) - p(u' - u)x - \int_{p_0}^{p} pdu$$

Величина U_0 есть постоянная, зависящая отъ природы жидкости. Это выраженіе раціонально будетъ нѣсколько измѣнить для болѣе удобнаго приложенія. Интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\int_{p_0}^{p} pdu = pu - p_0u_0 - \int_{p_0}^{p} udp$$

Вставивъ это значеніе въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$U - U_0 = E(Lx + \int_{T_0}^{T} mdt) - p[u + (u' - u)x] + p_0u_0 + \int_{p_0}^{p} udp$$

или, замѣчая, что объемъ v смѣси равняется $u + (u' - u)x$, получимъ:

$$(11)\quad U - U_0 = E(Lx + \int_{T_0}^{T} mdt) - pv + p_0u_0 + \int_{p_0}^{p} udp$$

Измѣненіе внутренней энергіи смѣси между двумя состояніями, характеризуемыми значками 1 и 2, дается слѣдующимъ уравненіемъ:

$$(12)\quad U_2 - U_1 = E(L_2x_2 - L_1x_1) - p_2v_2 + p_1v_1 + E\int_{T_1}^{T_2} m dt + \int_{p_1}^{p_2} u dp$$

Въ практикѣ же можно довольствоваться простою приближенною формулою. — Мы видѣли, что для жидкостей коэффиціентъ m мало отличается отъ теплоемкости при постоянномъ давленіи C, такъ какъ сжимаемость ихъ весьма незначительна; съ другой стороны, объемъ u жидкости измѣняется очень мало. И такъ, если вмѣсто m поставимъ C, а вмѣсто u, разсматриваемаго постояннымъ, — u_0, то получимъ съ достаточною точностью:

$$(13)\quad U = U_0 + ELx + EC(T - T_0) - p(v - u)$$

$$(14)\quad \begin{cases} U_2 - U_1 = E(L_2x_2 - L_1x_1) + EC(T_2 - T_1) \\ -p_2v_2 + p_1v_1 + (p_2 - p_1)u \end{cases}$$

Измѣненіе состоянія смѣси жидкости и пара по адіабатической линіи. — Работа при расширеніи.

100. Для любаго измѣненія состоянія смѣси жидкости и пара мы нашли уравненіе (n^o92):

$$(7)\quad \frac{dQ}{T} = \frac{m}{T} dT + d\left(\frac{Lx}{T}\right)$$

Если во время измѣненія состоянія смѣсь не находится въ обмѣнѣ теплоты съ окружающими тѣлами, а потому не пріобрѣтаетъ и не отдаетъ теплоты, то предъидущее уравненіе будетъ:

$$0 = \frac{m}{T} dT + d\left(\frac{Lx}{T}\right)$$

или

$$d\left(\frac{Lx}{T}\right) = -\frac{m}{T} dT$$

Посредствомъ интегрированія найдемъ:

$$(15)\quad \frac{L_2x_2}{T_2} - \frac{L_1x_1}{T_1} = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT$$

гдѣ x_1 и x_2 означаютъ вѣса паровъ, содержащихся въ килограммѣ смѣси при температурѣ T_1 и T_2.

Если извѣстно въ смѣси количество x_1 при температурѣ T_1, то предъидущее уравненіе дастъ возможность вычислить x_2 въ смѣси при всякой другой температурѣ T_2; и тогда объемъ смѣси опредѣлится съ помощью слѣдующей формулы:

$$v = u + (u' - u)x$$

Замѣнивъ x_2 въ уравненіи (12) его значеніемъ, выведеннымъ изъ (15), получимъ:

$$(16)\quad \left| \begin{array}{l} U_2 - U_1 = EL_1x_1 \dfrac{T_2 - T_1}{T_1} + E\displaystyle\int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_2}{T}\right) dT \\ -p_2v_2 + p_1v_1 + \displaystyle\int_{p_1}^{p_2} u dp \end{array} \right.$$

101. Такъ какъ во время этого измѣненія состоянія не происходитъ ни потери, ни пріобрѣтенія теплоты, то произведенная внѣшняя работа S равна потерѣ внутренней энергіи $U_1 - U_2$ и, слѣдовательно,

$$(17)\quad S = E(L_1x_1 - L_2x_2) + p_2v_2 - p_1v_1 - E\int_{T_1}^{T_2} m dT - \int_{p_1}^{p_2} u dp$$

Эти формулы Клаузіусъ примѣнилъ къ расширенію водянаго пара, какъ оно происходитъ въ паровыхъ машинахъ [1]). Разсмотримъ, напримѣръ, насыщенный и сухой водяной паръ при температурѣ 150^0

[1]) Clausius, Pogg. Ann. Bd. XCVII, или Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie. Braunschweig, 1864. Erst. Abth. S. 175, 176, 178.

и примемъ за единицу объема такой объемъ, который, при тѣхъ же условіяхъ, содержитъ одинъ килограммъ пара; тогда въ разсматриваемомъ случаѣ $t_1 = 150^0$, $x_1 = 1$, $v_1 = 1$.

Слѣдующая таблица даетъ вѣсъ излишне остающагося пара, объемъ смѣси и произведенную внѣшнюю работу при различныхъ температурахъ.

t	x	v	S	v'
125°	0,956	1,88	11300 килм.	1,93
100	0,911	3,90	23200	4,16
75	0,866	9,23	35900	10,11
50	0,821	25,7	49300	29,7
25	0,776	88,7	63900	107,1

Какъ видно, сгущеніе бываетъ тѣмъ больше, чѣмъ болѣе паръ расширяется. Далѣе видно, что объемъ смѣси отъ температуры 150° до 50 становится въ 26 разъ болѣе. Однако расширеніе невозможно доводить до этого предѣла.

Если вычислимъ объемъ v' пара, прилагая законъ Маріотта и допуская, что не произойдетъ сгущенія, то получимъ слишкомъ большія числа, что̀ и показываетъ послѣдній столбецъ таблицы.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Паровыя машины.

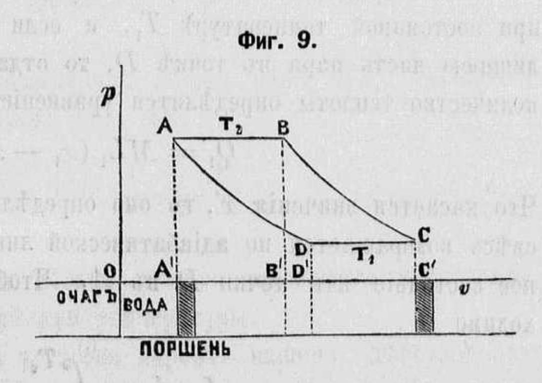
Идеальная машина.—Осуществленныя машины.—Несовершенное расширеніе.—Усовершенствованія въ паровыхъ машинахъ: паровой кожухъ Уатта, примѣненіе перегрѣтаго пара, машины съ двумя жидкостями.

Идеальная машина.

102. Разсмотримъ теперь идеальную машину, работающую по круговому процессу Карно. О ней можно составить себѣ понятіе слѣдующимъ образомъ.

Пусть одинъ и тотъ же цилиндръ одновременно играетъ роль котла, насоса и конденсатора. Допустимъ, что въ цилиндрѣ находится вѣсъ M воды при температурѣ T_2 и при соотвѣтствующемъ давленіи p_2;—что производимая топильнымъ пространствомъ теплота обращаетъ часть воды въ паръ при постоянной температурѣ T_2.

Фиг. 9.



Первый періодъ операціи представится изотермической линіею AB, параллельною оси Ov, такъ какъ давленіе пара при этомъ посто-

янно. Пусть, за тѣмъ, расширеніе совершается по адіабатической линіи BC до температуры T_1; во время же третьяго періода смѣсь сжимается при постоянной температурѣ T_1 по изотермической линіи CD, при чемъ цилиндръ окруженъ холодною водою при T_1. Наконецъ, пусть смѣсь снова сжимается по адіабатической линіи DA такимъ образомъ, что она опять возвращается въ свое первоначальное состояніе A.

По изотермической линіи AB часть Mx_2 жидкости обращается въ паръ, при чемъ источникъ отдаетъ количество теплоты Q_2, опредѣляемое уравненіемъ:

$$Q_2 = L_2 M x_2 = M L_2 x_2$$

Отъ B до C смѣсь расширяется безъ пріобрѣтенія и потери теплоты; поэтому, если означимъ черезъ x_1 излишнюю часть пара въ состояніи C, то, по уравненію (15) въ n^0 100,

$$(1) \qquad \frac{L_1 x_1}{T_1} = \frac{L_2 x_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT$$

Изъ этого уравненія можно вычислить x_1 и, слѣдовательно, опредѣлить состояніе смѣси въ точкѣ C.

По изотермической линіи CD сгущается новое количество пара при постоянной температурѣ T_1, и если означить черезъ x' излишнюю часть пара въ точкѣ D, то отданное охлаждающему тѣлу количество теплоты опредѣлится уравненіемъ:

$$Q_1 = M L_1 (x_1 - x')$$

Что касается значенія x', то оно опредѣляется тѣмъ условіемъ, что смѣсь возвращается по адіабатической линіи въ свое первоначальное состояніе изъ точки D въ A. Чтобы случилось это, необходимо

$$(2) \qquad \frac{L_1 x'}{T_1} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT$$

потому что въ точкѣ A значеніе x равно нулю.

Часть происшедшаго пара x_2 дается произвольно, и посредствомъ ея можно выразить всѣ прочія величины.

Вычитая уравненіе (2) изъ перваго, получимъ:

$$\frac{L_1 (x_1 - x')}{T_1} = \frac{L_2 x_2}{T_2}$$

слѣдовательно значеніе Q_1 можно написать такъ:

$$Q_1 = M L_2 x_2 \frac{T_1}{T_2}$$

Поэтому перешедшее въ работу количество теплоты будетъ

$$Q_2 - Q_1 = M L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Ясно, что коеффиціентъ экономіи выразится посредствомъ

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

потому что машина работаетъ по круговому процессу Карно. Произведенная же ею внѣшняя работа есть

$$S = M E L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

Такъ велика работа, произведенная вѣсомъ пара Mx_2. Очевидно, что работа одного килограмма пара есть

$$(3) \qquad S = E L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

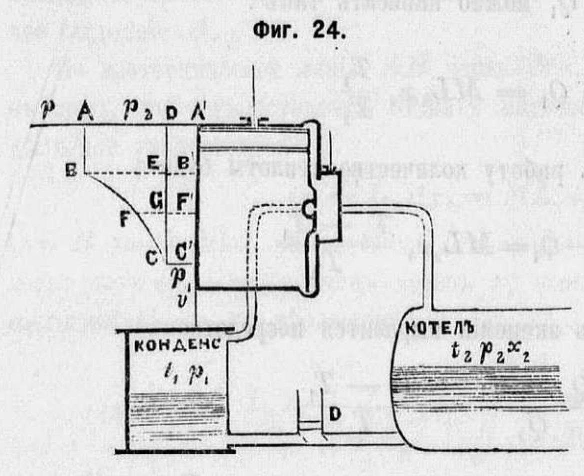
и она наибольшая, какую только можетъ произвести килограммъ пара между данными предѣлами температуры.

До сихъ поръ еще не устроена паровая машина, дѣйствіе которой происходило бы по круговому процессу Карно. Теперь мы разсмотримъ дѣйствительно осуществленныя машины.

Осуществленныя машины.

103. Разсмотримъ машину двойнаго дѣйствія съ конденсаціей, при которой котелъ имѣетъ температуру t_2, а охлаждающее тѣло—t_1.

Фиг. 24.



Пусть x_2 будетъ количество пара, доставляемаго котломъ вмѣстѣ съ частицами жидкости, p_2 — соотвѣтствующее давленіе и M—вѣсъ смѣси, расходуемой при каждомъ ходѣ поршня. Сначала эта смѣсь вступаетъ въ цилиндръ сверхъ поршня и дѣйствуетъ впродолженіе части пути $A'B'$ полнымъ давленіемъ; затѣмъ сообщеніе котла съ внутреннимъ пространствомъ цилиндра прекращается посредствомъ препятствія, и въ то время, когда поршень проходитъ путь $B'C'$, паръ расширяется. Предположимъ теперь, что расширеніе будетъ полное, т. е. что давленіе p_1 въ точкѣ C въ концѣ движенія равняется наибольшему давленію, соотвѣтствующему температурѣ t_1 конденсатора.

Чтобы опредѣлить работу, произведенную во время одного хода поршня, замѣтимъ, что нижняя его площадь постоянно сообщается съ внутреннимъ пространствомъ конденсатора и испытываетъ давленіе p_1. Впродолженіе пути $A'B'$ разность давленій на обѣ стороны поршня будетъ $p_2—p_1$. Далѣе, если v_2—удѣльный объемъ смѣси, то объемъ пространства $A'B'$ въ цилиндрѣ равняется Mv_2, а работа, произведенная при полномъ давленіи, будетъ

$$Mv_2\,(p_2-p_1)$$

Означимъ черезъ x_1 количество пара въ смѣси въ точкѣ C, а черезъ v_1 — его удѣльный объемъ; тогда работа, произведенная во время расширенія BC, опредѣлится формулою (17) въ n^0 101, если вычтемъ работу, произведенную давленіемъ p_1, дѣйствующимъ на нижнюю площадь поршня. Такимъ образомъ получимъ:

$$M\left[E(L_2x_2-L_1x_1)+p_1v_1-p_2v_2+E\int_{T_1}^{T_2} m dT + \int_{p_1}^{p_2} udp - p_1(v_1-v_2)\right]$$

Если извѣстно первоначальное количество пара x_2, то можно опредѣлить x_1 по уравненію (15) въ n^0 100:

$$\frac{L_1\,x_1}{T_1}=\frac{L_2\,x_2}{T_2}+\int_{T_1}^{T_2}\frac{m}{T}\,dT\;.$$

Объемъ v_1 также извѣстенъ, потому что, назвавъ чрезъ u'_1 удѣльный объемъ насыщеннаго и сухаго пара при температурѣ T_1, получимъ:

$$v_1 = u + (u'_1 - u)\;x_1$$

Если замѣнить x_1 его значеніемъ, то выраженіе работы при расширеніи перейдетъ въ

$$M\left[\;EL_2\;x_2\,\frac{T_2-T_1}{T_2}-v_2\,(p_2-p_1)+E\int_{T_1}^{T_2} m\,\left(1-\frac{T_1}{T}\right)d\,T + \int_{p_1}^{p_2} u\;dp\;\right]$$

Прибавивъ сюда работу, произведенную при полномъ давленіи пара, получимъ полную работу:

$$(4) \quad M\left[EL_2\, x_2\, \frac{T_2 - T_1}{T_2} + E\int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT + \int_{p_1}^{p_2} u\,dp\right]$$

Изъ этой суммы нужно вычесть работу, необходимую для движенія насоса D, который при каждомъ ходѣ поршня всасываетъ изъ конденсатора вѣсъ M жидкости при температурѣ t_1 и при давленіи p_1, а затѣмъ передаетъ его котлу при болѣе высокомъ давленіи. Если означимъ атмосферное давленіе чрезъ H, то работа, необходимая для поднятія поршня этого насоса, будетъ равняться

$$M(H - p_1)\, u$$

А чтобы заставить жидкость войдти въ котелъ, нужно израсходовать еще работу

$$M\,(p_2 - H)\, u$$

Такимъ образомъ работа, необходимая для движенія насоса, должна равняться

$$M\,(p_2 - p_1)\, u$$

Такъ какъ удѣльный объемъ u жидкости измѣняется очень мало, то приблизительно получимъ:

$$M\,(p_2 - p_1)\, u = M\int_{p_1}^{p_2} u\, dp$$

Слѣдовательно, работа, которою можно располагать при каждомъ ходѣ поршня, окончательно равняется

$$(5) \quad S = ME\left[L_2\, x_2\, \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT\right]$$

104. Эта работа получится также, вычисляя потерю теплоты при каждомъ ходѣ поршня.—Сначала топильное пространство доставляетъ количество теплоты $MC\,(T_2 - T_1)$, для того чтобы возвысить температуру воды, питающей котелъ, отъ T_1 до T_2 при давленіи p_2; далѣе, часть x_2 этой жидкости, при томъ же давленіи, обращается въ паръ, для чего необходимо количество теплоты $ML_2\, x_2$. Такимъ образомъ, полное количество ея Q_2, доставляемое топильнымъ пространствомъ, будетъ:

$$Q_2 = ML_2\, x_2 + MC(T_2 - T_1)$$

Послѣ расширенія смѣсь имѣетъ температуру T_1 и содержитъ въ себѣ вѣсъ $M\,(1 - x_1)$ жидкости, не испытывающей ни какихъ измѣненій, и вѣсъ Mx_1 пара, превращающагося въ конденсаторѣ въ жидкость и дающаго, при этомъ, количество теплоты Q_1, равное $ML_1\, x_1$. Слѣдовательно, количество ея, перешедшее въ работу, будетъ

$$Q_2 - Q_1 = M\,[L_2\, x_2 - L_1\, x_1 + C\,(T_2 - T_1)]$$

Мы уже видѣли, что для жидкостей, безъ чувствительной ошибки, можно вмѣсто C поставить m, и, слѣдовательно, допустить, что

$$C\,(T_2 - T_1) = \int_{T_1}^{T_2} m\,dT$$

Если это значеніе ввести въ предъидущее уравненіе, а вмѣсто x_1 поставить его величину, то получится:

$$Q_2 - Q_1 = M\left[L_2\, x_2\, \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT\right]$$

т. е. снова пришли къ формулѣ (5).

Коэффиціентъ экономіи у этой машины имѣетъ слѣдующее значеніе:

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT}{L_2\, x_2 + \int_{T_1}^{T_2} m\, dT}$$

Его можно привести къ формулѣ:

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} - \frac{T_1 \int_{T_1}^{T_2} m\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_2}\right) dT}{L_2\, x_2 + \int_{T_1}^{T_2} m\, dT}$$

Отсюда ясно, что онъ менѣе того коэффиціента, когда машина работаетъ по круговому процессу Карно. Несовершенство же дѣйствія машины даетъ поводъ къ затратѣ работы.

Далѣе видно, что выгоднѣе употреблять сухой паръ, потому что если положить $x_2 = 1$, то второй членъ уменьшится, и коэффиціентъ экономіи приблизится къ своему наибольшему значенію. Въ послѣдующемъ мы всегда будемъ предполагать, что паръ, доставляемый котломъ, не только насыщенъ, но и сухъ.

105. Пусть, напримѣръ, намъ дана машина, паровой котелъ которой имѣетъ температуру 150^0 и доставляетъ сухой паръ, а конденсаторъ находится при $50°$. Въ этихъ предѣлахъ температуры наибольшее значеніе коэффиціента экономіи будетъ

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{100}{273 + 150} = 0{,}236$$

Въ разсматриваемой нами машинѣ работа, произведенная килограммомъ сухаго пара, по уравненію (5), есть

$$S = E\left[L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT\right] \tag{6}$$

Замѣнивъ m теплоемкостью C, которую разсматриваемъ какъ постоянную, получимъ болѣе простую формулу, довольно точную для практики:

$$S = E\left[L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + C(T_2 - T_1) + CT_1 \log\frac{T_2}{T_1}\right] = 132\ E$$

Доставляемая топильнымъ пространствомъ теплота будетъ

$$Q_2 = C(T_2 - T_1) + L_2 = 602$$

Поэтому, коэффиціентъ экономіи есть $\frac{132}{602} = 0{,}219$.—Несовершенство круговаго процесса уменьшаетъ его на 0,017.

Несовершенное расширеніе.

106. Въ предъидущемъ мы принимали, что паръ расширяется совершенно отъ температуры $150°$ въ котлѣ до температуры 50^0 въ конденсаторѣ. При этихъ условіяхъ, какъ видѣли ($n^0 101$), конечный объемъ пара въ 26 разъ больше начальнаго. Въ практикѣ далеко не пользуются полнымъ расширеніемъ, и конечный объемъ пара едва въ четыре раза болѣе начальнаго; вслѣдствіе чего и происходитъ потеря работы.

Положимъ, что расширеніе прервано въ точкѣ F (фиг. 24) при температурѣ T'; тогда паръ имѣетъ давленіе p', большее чѣмъ p_1, и стремится оттуда въ конденсаторъ. При этомъ потеря работы изобразится площадью FCG; это та часть работы при расширеніи, которою не пользуются. Означимъ посредствомъ v' удѣльный объемъ въ F, а чрезъ x'—количество пара въ смѣси; тогда, по уравненію

(17) въ $n^0 101$, работа при несовершенномъ расширенiи BF уменьшится на работу давленiя p_1, дѣйствующаго на нижнюю площадь поршня,—

$$M\Big[E(L_2x_2-L'x')+p'v'-p_2v_2+E\int_{T'}^{T_2} m\,dT$$

$$+\int_{p'}^{p_2} u\,dp-p_1(v'-v_2)\Big]$$

Замѣнивъ здѣсь x' его значенiемъ изъ уравненiя

$$\frac{L'x'}{T'}=\frac{L_2x_2}{T_2}+\int_{T'}^{T_2}\frac{m}{T}\,dT$$

получимъ:

$$M\Big[E\,L_2x_2\frac{T_2-T'}{T_2}+p'v'-p_2v_2+E\int_{T'}^{T_2} m(1-\frac{T'}{T})dT$$

$$+\int_{p'}^{p_2} u\,dp-p_1(v'-v_2)\Big]$$

Прибавивъ сюда работу, произведенную при полномъ давленiи, и, съ другой стороны, отнявъ ту, которая необходима для движенiя насоса, получимъ работу, которою можно располагать:

$$(7)\qquad M\Big[E\,L_2x_2\frac{T_2-T'}{T_2}+(p'-p_1)(v'-u)$$

$$+E\int_{T'}^{T_2} m\,(1-\frac{T'}{T})dT\Big]$$

Слѣдовательно приблизительное значенiе для работы, доставляемой килограммомъ сухаго пара и которою можно располагать, будетъ:

$$(8)\qquad S=E\Big[L_2\frac{T_2-T'}{T_2}+A(p'-p_1)(v'-u)$$

$$+C(T_2-T')-CT'\log\frac{T_2}{T'}\Big]$$

Затѣмъ, предположимъ, что во взятой нами для примѣра машинѣ расширенiе прекращается при температурѣ 100^0; тогда объемъ пара въ концѣ расширенiя будетъ приблизительно вчетверо больше чѣмъ въ началѣ, и предъидущее уравненiе дастъ: $S=99E$; при совершенномъ же расширенiи S равняется $132E$. Такимъ образомъ, вслѣдствiе несовершеннаго расширенiя потеря работы будетъ $33E$, т. е. четвертая часть всей работы, получающейся при полномъ расширенiи.

Усовершенствованiя въ паровыхъ машинахъ. — Паровой кожухъ Уатта.

107. Уаттъ первый пришелъ къ мысли окружать рубашку цилиндра вторымъ цилиндромъ, въ которомъ движутся горячiе газы, послѣ того какъ они нагрѣютъ котелъ и ранѣе чѣмъ войдутъ въ дымовую трубу. Эти газы доставляютъ пару теплоту и препятствуютъ сгущенiю, которое обыкновенно происходитъ во время расширенiя. Такимъ образомъ здѣсь избѣгается образованiе воды при сгущенiи въ цилиндрѣ, которая мѣшаетъ движенiю поршня, а производительность увеличивается безъ необходимаго увеличиванiя затраты горючаго матерiала.

Допустимъ, что нагрѣтые газы постоянно поддерживаютъ паръ въ насыщенномъ и сухомъ состоянiи и вычислимъ ту работу, которою можно располагать при этихъ условiяхъ.

Если при каждомъ ходѣ поршня расходуется вѣсъ M пара, то, слѣдовательно, необходимо: количество теплоты $M\int_{T_1}^{T_2} C\,dT$, для того

чтобы возвысить температуру воды въ конденсаторѣ отъ T_1 до T_2; далѣе, количество ея ML_2—для испаренія при температурѣ T_2 и, наконецъ, количество $\int_{T_2}^{T_1} m'dT$—для поддержанія пара сухимъ отъ T_2 до T_1. И такъ, все количество теплоты Q_2, доставляемое топильнымъ пространствомъ, будетъ

$$Q_2 = M\left[\int_{T_1}^{T_2} CdT + L_2 + \int_{T_2}^{T_1} m'dT\right]$$

или

$$Q_2 = M\left[\int_{T_1}^{T_2} CdT + L_2 + \int_{T_1}^{T_2} (-m')\, dT\right]$$

При этомъ паръ сухимъ приходитъ въ конденсаторъ и отдаетъ ему количество теплоты

$$Q_1 = ML_1$$

Слѣдовательно, количество теплоты, переходящее въ работу, будетъ

$$Q_2 - Q_1 = M\left[L_2 - L_1 + \int_{T_1}^{T_2} CdT + \int_{T_1}^{T_2} (-m')\, dT\right]$$

Подставивъ, какъ выше, m вмѣсто C, получимъ работу, произведенную килограммомъ пара:

$$S = E\left[L_2 - L_1 + \int_{T_1}^{T_2} (m - m')\, dT\right]$$

Это выраженіе, съ помощью уравненія (β) В. Томсона ($n^0 91$), можно упростить:

$$m - m' = -\frac{dL}{dT} + \frac{L}{T}$$

Отсюда

$$\int_{T_1}^{T_2} (m - m')\, dT = -(L_2 - L_1) + \int_{T_1}^{T_2} \frac{L}{T}\, dT$$

и, слѣдовательно,

$$(9) \qquad S = E\int_{T_1}^{T_2} \frac{L}{T}\, dT$$

Но, по изслѣдованіямъ Реньо,

$$L = 606{,}50 - 0{,}695t = 796{,}25 - 0{,}695T$$

а потому

$$\frac{L}{T} = \frac{796{,}25}{T} - 0{,}695$$

Если ввести это значеніе въ формулу (9), то

$$(10) \qquad S = E\left[796{,}25 \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - 0{,}695\,(T_2 - T_1)\right]$$

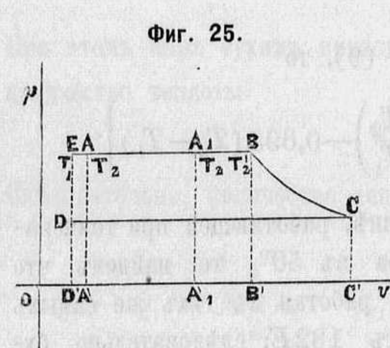
Если примѣнить эту формулу къ машинѣ, работающей при температурѣ котла въ 150^0, а конденсатора въ 50^0, то найдемъ, что $S = 144E$. Обыкновенная же машина, работая въ тѣхъ же самыхъ предѣлахъ температуры ($n^0 105$), даетъ $132E$; слѣдовательно будетъ прибыль $12E$. При такомъ измѣненіи, введенномъ Уаттомъ, топильное пространство, безъ сомнѣнія, доставляетъ пару большее количество теплоты, и при томъ же расходѣ горючаго матеріала работа увеличивается на $^1/_{11}$ своей величины; цилиндръ же становится свободнымъ отъ воды, происшедшей при сгущеніи.

Примѣненіе перегрѣтаго пара.

108. Во всѣхъ разсмотрѣнныхъ нами до сихъ поръ машинахъ мы всегда предполагали, что паръ насыщенъ, какъ при входѣ его

въ цилиндръ, такъ и при расширеніи. Чтобы увеличить коеффиціентъ экономіи, необходимо паръ доводить до очень высокой температуры; но съ возвышеніемъ ея давленіе водянаго пара возрастаетъ такъ быстро, что приходится отказаться отъ такого намѣренія, вслѣдствіе недостаточнаго сопротивленія стѣнокъ котла. Это затрудненіе устраняется примѣненіемъ перегрѣтаго пара; при этомъ можно возвышать его температуру, не увеличивая чрезмѣрно давленія. Паръ заставляютъ переходить изъ перваго котла во второй, гдѣ онъ нагрѣвается тѣми же самыми горячими газами, которые уже служили для нагрѣванія перваго котла, при чемъ давленіе его не измѣняется, такъ какъ оба котла постоянно находятся въ сообщеніи другъ съ другомъ, и, слѣдовательно, нѣтъ надобности въ новой затратѣ горючаго матеріала. Этотъ перегрѣтый паръ входитъ во внуть цилиндра, гдѣ работаетъ почти полнымъ давленіемъ, потомъ расширяется и переходитъ въ конденсаторъ.

Фиг. 25.



Пусть E (фиг. 25) будетъ состояніе воды, которая при температурѣ T_1 переходитъ изъ конденсатора въ первый котелъ, хотя при давленіи p_2; потомъ она сначала нагрѣвается до температуры T_2, оставаясь жидкою, и переходитъ въ состояніе A, измѣняя только весьма мало свой объемъ. Затѣмъ она обращается въ насыщенный и сухой паръ при томъ же самомъ давленіи p_2 и переходитъ въ состояніе A_1. Послѣ того паръ идетъ во второй котелъ, гдѣ горячіе газы нагрѣваютъ его до температуры T'_2 при постоянномъ давленіи и приводятъ его въ состояніе B. Доставленное топильнымъ пространствомъ количество теплоты Q_2 во время этихъ трехъ измѣненій состоянія, будетъ

$$Q_2 = M\left[\int_{T_1}^{T_2} C\,dT + L_2 + \int_{T_2}^{T'_2} C'dT\right]$$

Наконецъ, паръ входитъ въ цилиндръ, работаетъ тамъ и расширяется по адіабатической линіи BC отъ давленія p_2 до давленія p_1 въ конденсаторѣ. Хотя паръ перегрѣтъ, все-таки онъ будетъ насыщенъ при расширеніи; затѣмъ онъ частью сгущается, и количество его будетъ x_1 при достиженіи конденсатора, гдѣ онъ переходитъ въ жидкое состояніе. Потомъ вода находится въ состояніи D и дѣйствіемъ насоса, который доставляетъ ее въ котелъ, приводится къ первоначальному ея состоянію E при давленіи p_2. Послѣднее совершается по адіабатической линіи DE, которая представляетъ почти прямую, параллельную Op, потому что измѣненіе объема очень мало.

Освободившееся въ конденсаторѣ количество теплоты будетъ

$$Q_1 = ML_1\,x_1$$

а перешедшее въ работу—

$$Q_2 - Q_1 = M\left[L_2 - L_1x_1 + \int_{T_1}^{T_2} C\,dT + \int_{T_2}^{T_2'} C'dT\right]$$

Чтобы опредѣлить окончательное количество x_1 пара, воспользуемся уравненіемъ

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

которое пригодно ко всякому сомкнутому круговому процессу ($n^o 68$). Въ настоящемъ случаѣ это уравненіе будетъ:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{C}{T}\,dT + \frac{L_2}{T_2} + \int_{T_2}^{T_2'} \frac{C'}{T}\,dT + 0 - \frac{L_1x_1}{T_1} + 0 = 0$$

Откуда

$$\frac{L_1\,x_1}{T_1} = \frac{L_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{C}{T}\,dT + \int_{T_2}^{T'_2} \frac{C'}{T}\,dT$$

Если ввести это значенiе x_1 въ выраженiе для перешедшей въ работу теплоты, то

$$Q_2 - Q_1 = M\left[L_2\frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} C\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT\right.$$

$$\left. + \int_{T_2}^{T_2'} C'\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT\right]$$

Слѣдовательно работа, произведенная килограммомъ пара, будетъ

$$(11) \qquad S = E\left[L_2\frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} C\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT\right.$$

$$\left. + \int_{T_2}^{T_2} C'\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT\right]$$

Для обыкновенной машины мы нашли (n^0 105):

$$S_0 = E\left[L_2\frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT\right]$$

Далѣе, обращая вниманiе на то, что m почти равно C, увидимъ, что отъ примѣненiя къ машинѣ перегрѣтаго пара достигается выигрышъ въ работѣ, равный

$$(12) \qquad S - S_0 = E\int_{T_2}^{T_2'} C'\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT$$

Положимъ, какъ прежде, что температура въ котлѣ 150^0, а въ конденсаторѣ 50^0, что паръ перегрѣтъ до 300^0 и расширенiе полное. Такъ какъ теплоемкость перегрѣтаго пара еще недостаточно извѣстна, то мы примемъ ее постоянною и равною 0,4805. Тогда найдемъ, что $x_1 = 0{,}771$, $S - S_0 = 23E$; откуда $S = 155\,E$.

Отсюда видно, что производительность машины, безъ новой затраты горючаго матерiала, увеличилась вшестеро. — Примѣненiе перегрѣтаго пара есть одно изъ важнѣйшихъ усовершенствованiй, какiя были сдѣланы въ паровыхъ машинахъ.

Машины съ двумя жидкостями.

109. Какъ мы уже видѣли, для производительности машины весьма важно, чтобы изъ двухъ температуръ T_2 и T_1, между которыми она работаетъ, одна изъ нихъ по возможности была выше, а другая какъ можно ниже, и чтобы паръ расширялся совершенно отъ одной изъ нихъ до другой. Но это послѣднее условiе потребовало бы для машины такихъ размѣровъ, которые невозможно было бы выполнить. Такое затрудненiе пытались устранить, употребляя двѣ далеко не одинаковыя по летучести жидкости, напримѣръ воду и эфиръ.—Разсматриваемая машина состоитъ изъ двухъ машинъ. Водяной паръ, производимый въ котлѣ теплотою топильнаго пространства при температурѣ T_2, достигаетъ конденсатора, имѣющаго промежуточную между T_2 и T_1 температуру T'; затѣмъ, освободившаяся въ конденсаторѣ теплота производитъ испаренiе эфира. Происшедшiй при температурѣ T' эфирный паръ приводитъ въ движенiе второй поршень и достигаетъ другаго конденсатора при температурѣ T_1. При этомъ первый конденсаторъ играетъ роль топильнаго пространства для эфирной машины. Среднюю температуру T' можно выбрать такъ, что водяной паръ между T_2 и T', а эфирный между T' и T_1 будутъ расширяться совершенно.



Съ теоретической точки зрѣнiя, машина съ двумя жидкостями будетъ работать совершенно также, какъ и машина съ одною жидкостью, работающая въ тѣхъ же самыхъ предѣлахъ температуры T_2 и T_1.

Предположимъ, что машины совершенныя, т. е. что онѣ работаютъ по круговому процессу Карно. Въ первой изъ нихъ, работающей между температурами T_2 и T', топильное пространство

доставляетъ количество теплоты Q_2, часть которой, а именно

$$Q_2 \frac{T_2 - T'}{T_2}$$

обращается въ работу, а другая часть

$$Q_2 \frac{T'}{T_2} = Q'$$

освобождается въ первомъ конденсаторѣ и служитъ для нагрѣванія второй машины. Это второе количество теплоты Q' снова раздѣляется на двѣ части, одну

$$Q' \frac{T' - T_1}{T'}$$

переходящую въ работу, и другую

$$Q' \frac{T_1}{T'}$$

освобождающуюся въ конденсаторѣ и совершенно теряющуюся. Поэтому вся теплота, перешедшая въ работу, будетъ

$$Q_2 \frac{T_2 - T'}{T_2} + Q' \frac{T' - T_1}{T'} = Q_2 \frac{T_2 - T'}{T_2} + Q_2 \frac{T' - T_1}{T_2}$$

$$= Q_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

При чемъ потерянная теплота будетъ

$$Q' \frac{T_1}{T'} = Q_2 \frac{T_1}{T_2}$$

Результатъ тотъ же самый, будетъ ли только одна машина, работающая по круговому процессу Карно въ тѣхъ же самыхъ предѣлахъ температуры T_2 и T_1, или же будутъ двѣ соединенныя между собою машины.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

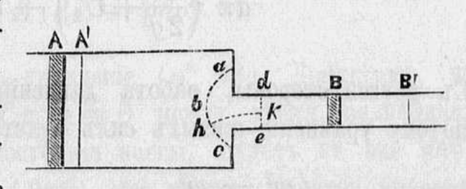
Истеченіе жидкостей.

Основныя начала. — Истеченіе капельной жидкости. — Истеченіе совершеннаго газа. — Истеченіе паровъ. — Инжекторъ Жиффара.

Основныя начала.

110. Представимъ себѣ два цилиндра, находящіеся между собою въ сообщеніи. Пусть поперечный разрѣзъ перваго изъ нихъ очень великъ сравнительно со вторымъ (фиг. 26). Въ этихъ цилиндрахъ движутся два поршня A и B, а между ними заключено извѣстное количество жидкости. Если давленіе p_1 на поршень A будетъ болѣе давленія p_2 на малый поршень B, то при этомъ произойдетъ истеченіе жидкости изъ большаго цилиндра въ малый. Пусть v_1 означаетъ удѣльный объемъ жидкости въ большомъ цилиндрѣ, T_1 — ея температуру при достаточномъ разстояніи отъ отверстія, а v_2 и T_2 соотвѣтственно — удѣльный объемъ и температуру въ маломъ цилиндрѣ; наконецъ, w_1 и w_2 означаютъ скорости движенія жидкости въ обоихъ цилиндрахъ. Затѣмъ, разсмотримъ обстоятельства послѣ того, когда истеченіе сдѣлалось правильнымъ.

Фиг. 26.



Примѣнимъ ко всей массѣ жидкости, находящейся въ движеніи, теорему живыхъ силъ.—Во время t эта масса занимаетъ объемъ AB, а во время $t+dt$, когда поршень A перейдетъ въ A', а B —въ B', масса жидкости займетъ объемъ $A'B'$. Выше мы показали, что измѣненіе полной энергіи равно суммѣ внѣшнихъ работъ (n^o 26). Если сравнить массу жидкости въ обоихъ ея положеніяхъ AB и $A'B'$, то окажется, что тѣ части ея, которыя въ обоихъ случаяхъ занимаютъ объемъ $A'B$, будутъ въ томъ же самомъ состояніи и, слѣдовательно, имѣютъ одну и ту же энергію; поэтому измѣненіе энергіи равно разности энергій массъ BB' и AA'. Если $d\pi$ означаетъ вѣсъ массы AA' и вѣсъ равной ей массы BB'; далѣе, если U_1 будетъ внутренняя энергія единицы вѣса жидкости при температурѣ T_1 и при давленіи p_1, а U_2 — энергія при температурѣ T_2 и при давленіи p_2, то полная энергія массы AA' выразится посредствомъ $d\pi\left(\frac{w_1^2}{2g}+U_1\right)$, а массы BB' — посредствомъ $d\pi\left(\frac{w_2^2}{2g}+U_2\right)$; слѣдовательно, измѣненіе энергіи массы жидкости во время движенія будетъ

$$d\pi\left(\frac{w_2^2}{2g}+U_2\right)-d\pi\left(\frac{w_1^2}{2g}+U_1\right)$$

Съ другой стороны, работа давленій есть $p_1 v_1 d\pi - p_2 v_2 d\pi$, а потому уравненіе живыхъ силъ будетъ:

$$d\pi\left(\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}+U_2-U_1\right)=p_1v_1d\pi-p_2v_2d\pi$$

Отсюда

$$(1)\qquad \frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=p_1v_1-p_2v_2-(U_2-U_1)$$

Въ этомъ уравненіи предполагается, что не существуетъ обмѣна теплоты со внѣшними тѣлами.

111. Измѣненіе состоянія жидкости происходитъ между извѣстною криволинейною поверхностью abc, лежащею внутри большаго цилиндра, и площадью de — внутри малаго. Частички жидкости опишутъ линіи, подобныя hk, нормальныя къ обѣимъ поверхностямъ. Разсмотримъ, поэтому, безконечно малую массу m жидкости, движущуюся по линіи hk. Давленіе, испытываемое ею отъ окружающихъ частицъ, не со всѣхъ сторонъ одинаково: оно болѣе слѣва, чѣмъ справа, а въ этомъ-то и заключается причина приращенія ея видимой энергіи $\frac{mw^2}{2}$. — Разсмотримъ теперь внутреннее движеніе массы m, т. е. движеніе ея относительно центра тяжести. Мы знаемъ, что теорема живыхъ силъ пригодна и къ настоящему случаю. Еслибы внѣшнее давленіе на поверхность массы m было равномѣрно, то произведенная этимъ давленіемъ работа при относительномъ движеніи была бы $-mgpdv$. Хотя это давленіе и неравномѣрно, все-таки разница, происходящая при этомъ, есть величина высшаго порядка, и ею можно пренебречь. Если назовемъ черезъ $mgdQ$ количество теплоты, пріобрѣтенное массою m во время dt, то теорема живыхъ силъ, будучи приложена къ внутреннему движенію этой маленькой массы, дастъ (n^o 28) слѣдующее уравненіе:

$$mgdU=mgEdQ-mgpdv$$

или

$$(a)\qquad dQ=A(dU+pdv)$$

Это есть первое главное уравненіе (n^o 38). Допустимъ, что существуетъ отношеніе $\varphi(T,v,p)=0$ между тремя величинами, опредѣляющими внутреннее состояніе массы, будетъ ли она имѣть видимое движеніе, или нѣтъ. Ясно, что второе главное уравненіе (n^o 67)

$$(b)\qquad \frac{dQ}{T}=d\mu$$

тоже будетъ имѣть мѣсто, при чемъ μ есть функція двухъ перемѣнныхъ независимыхъ. Отсюда выходитъ, что всѣ слѣдствія, вытекающія изъ этихъ двухъ главныхъ уравненій, могутъ быть примѣнены и къ внутреннему измѣненію состоянія массы m, какъ если бы она не имѣла видимаго движенія.

Предположимъ въ настоящемъ случаѣ, что переходъ массы m изъ точки h въ k совершился въ такое короткое время, что не произошло обмѣна теплоты между ею и массою, ее окружающею.

Такъ какъ при этомъ dQ равняется нулю, то уравненіе (а) сведется на

$$dU + pdv = 0$$

а вслѣдствіе интегрированія между h и k —

$$(2) \qquad U_2 - U_1 = -\int_{v_1}^{v_2} pdv$$

Замѣнивъ $U_2 - U_1$ его значеніемъ изъ уравненія (1), получимъ:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} pdv$$

Если послѣдній членъ интегрировать по частямъ, то уравненіе приметъ болѣе простую форму:

$$(3) \qquad \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = -\int_{p_1}^{p_2} vdp = \int_{p_2}^{p_1} vdp$$

Объемъ v, находящійся подъ интеграломъ, есть функція давленія p, данная тѣмъ условіемъ, что измѣненіе жидкости совершается по адіабатической линіи, т. е. безъ обмѣна теплоты съ внѣшними тѣлами.

Истеченіе капельной жидкости.

112. Примѣнимъ эти выводы къ истеченію капельной жидкости, смотря на нее какъ на несжимаемую, при чемъ объемъ ея постоянный, и уравненіе (13) будетъ:

$$(4) \qquad \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = (p_1 - p_2)\, v$$

Если предположимъ, что поперечное сѣченіе цилиндра очень велико сравнительно съ каналомъ, по которому происходитъ истеченіе, то скорость w_1 будетъ очень мала, и ею можно пренебречь. Тогда предъидущее уравненіе сведется на

$$(5) \qquad \frac{w_2^2}{2g} = (p_1 - p_2)\, v$$

Такимъ образомъ приходимъ къ извѣстной гидродинамической формулѣ, выражающей законъ Торричелли относительно истеченія жидкостей.

Истеченіе совершеннаго газа.

113. При изслѣдованіи истеченія газа удобнѣе всего выходить изъ уравненія (1), потому что извѣстно значеніе внутренней энергіи, а именно для газовъ (n^0 51):

$$U_2 - U_1 = Ec\,(T_2 - T_1)$$
$$p_1 v_1 = \alpha\, p_0 v_0\, T_1$$
$$p_2 v_2 = \alpha\, p_0 v_0\, T_2$$

Если ввести эти значенія въ уравненіе (1), то

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = (\alpha p_0 v_0 + Ec)(T_1 - T_2)$$

Но, по n^0 46,

$$\alpha p_0 v_0 = E(C - c)$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$(6) \qquad \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = EC\,(T_1 - T_2)$$

Обыкновенно температура T_2 въ каналѣ истеченія не извѣстна, но ее можно вычислить какъ функцію опредѣленнаго давленія p_2. Для совершенныхъ газовъ имѣемъ (n^0 50) слѣдующее общее уравненіе:

$$p^c v^C = e^{\mu}$$

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ измѣненіе состоянія газа со-

вершается по адіабатической линіи, то значеніе μ постоянно, и, слѣдовательно, можно написать:

$$p_1^c v_1^C = p_2^c v_2^C$$

Далѣе,

$$\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Изъ этихъ двухъ отношеній выводятся слѣдующія:

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{C}{c}-1} = \frac{T_2}{T_1}$$

и

$$(7) \qquad \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{C-c}{C}} = \frac{T_2}{T_1}$$

Изъ уравненія (7) опредѣлимъ T_2, и если введемъ это значеніе въ уравненіе (6), то получимъ скорость истеченія w.

Въ томъ случаѣ, когда скоростью w_1 можно пренебречь, уравненіе (6) сведется на

$$(8) \qquad \frac{w_2^2}{2g} = EC(T_1 - T_2)$$

114. Числовой примѣръ. Приложимъ формулу истеченія къ нѣкоторому количеству воздуха, вытекающаго изъ находящагося въ атмосферѣ сосуда и имѣющаго температуру 30°, а давленіе въ полторы атмосферы. При этомъ $t_1 = 30^0$, $p_1 = {}^3/_2$ атмосферы, $p_2 = 1$ атмосферѣ, $C = 0{,}2375$, $c = 0{,}1684$, $C - c = 0{,}0691$. Если поставить эти величины въ уравненіе (7), то

$$T_2 = 303^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{691}{2375}} = 269^0$$

или

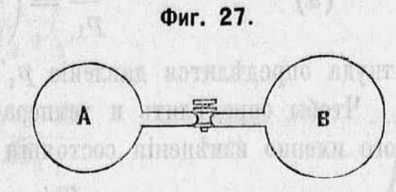
$$t_2 = -4^0$$

Затѣмъ, формула (8) дастъ: $w_2 = 258$ метрамъ.

Отсюда слѣдуетъ, что при такихъ условіяхъ истеченіе газа сопровождается значительнымъ пониженіемъ температуры и что оно совершается съ большою скоростью, 258 метровъ въ секунду.

115. Разсмотримъ далѣе два сосуда A и B (фиг. 27), соединенные между собою трубкою, которая можетъ запираться посредствомъ крана. Оба они наполнены однимъ и тѣмъ же газомъ, но пусть состояніе его въ A будетъ иное чѣмъ въ B. — Разсмотримъ явленіе въ то время, когда установлено сообщеніе посредствомъ открытія крана. Пусть V_1 — объемъ сосуда A, M_1 — вѣсъ находящагося въ немъ газа, v_1 — удѣльный объемъ этого газа, p_1 — давленіе, T_1 — его температура; далѣе, V_2, M_2, v_2, p_2 означаютъ соотвѣтствующія величины для сосуда B.

Фиг. 27.



Допустимъ, что $p_1 > p_2$ и разсмотримъ обстоятельства въ тотъ моментъ, когда вѣсъ M газа перешелъ изъ сосуда A въ B. При этомъ оставшееся количество его въ сосудѣ A будетъ $M_1 - M$, а состояніе его должно опредѣляться значеніями v'_1, p'_1, T'_1. Напротивъ того, въ сосудѣ B вѣсъ газа будетъ $M_2 + M$, и состояніе его опредѣлится значеніями v'_2, p'_2, T'_2. Всѣ эти новыя величины суть функціи вытекшаго вѣса M газа, а потому ихъ необходимо опредѣлить.

Вѣсъ $M_1 - M$ газа сначала наполнялъ только часть сосуда A, затѣмъ онъ расширился такъ, что занялъ весь объемъ V_1, не обмѣнявшись при этомъ теплотою со внѣшними тѣлами. Поэтому, для измѣненія состоянія этой массы газа, происходящаго по адіабатической линіи, пригодно уравненіе:

$$p'^c_1 v'^C_1 = p_1^c v_1^C$$

$$\frac{p'_1}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^{\frac{C}{c}}$$

Но отношеніе $\frac{v_1}{v'_1}$ извѣстно, потому что

$$v_1 = \frac{V_1}{M_1}, \qquad v'_1 = \frac{V_1}{M_1 - M}$$

слѣдовательно

$$\frac{v_1}{v'_1} = \frac{M_1 - M}{M_1}$$

И такъ,

$$\frac{p'_1}{p_1} = \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}} \tag{9}$$

Откуда опредѣлится давленіе p_1' въ сосудѣ A.

Чтобы опредѣлить и температуру T_1', замѣтимъ, что для такого именно измѣненія состоянія имѣемъ:

$$\frac{T_1'}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_1'}\right)^{\frac{C-c}{c}}$$

Отсюда получимъ:

$$\frac{T_1'}{T_1} = \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C-c}{c}} \tag{10}$$

Уравненіями (9) и (10) вполнѣ опредѣляется состояніе газа въ первомъ сосудѣ.

Во второмъ сосудѣ B находится вѣсъ $M_2 + M$ газа, представляющаго однородную смѣсь. Полная энергія всего количества газа, находящагося въ обоихъ сосудахъ, не измѣнилась во время явленія, потому что при этомъ не было произведено внѣшней работы. Это условіе даетъ намъ возможность опредѣлить состояніе газа въ B. Для единицы его вѣса имѣемъ вообще (n^0 51):

$$U = U_0 + EcT$$

Замѣчая, что полная энергія газа въ началѣ и въ концѣ явленія таже самая, получимъ уравненіе:

$$M_1(U_0 + EcT_1) + M_2(U_0 + EcT_2) = (M_1 - M)(U_0 + EcT_1') + (M_2 + M)(U_0 + EcT_2')$$

или

$$M_1T_1 + M_2T_2 = (M_1 - M)T_1' + (M_2 + M)T_2'$$

Если ввести сюда для T_1' его значеніе изъ уравненія (10), то получимъ:

$$T_2' = \frac{M_2\,T_2}{M_2 + M} + \frac{M_1\,T_1}{M_2 + M}\left[1 - \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right] \tag{11}$$

Чтобы вычислить значеніе p'_2, воспользуемся уравненіемъ

$$\frac{p'_2\,v'_2}{p_2\,v_2} = \frac{T_2'}{T_2}$$

или

$$\frac{p_2'}{p_2} = \frac{T'_2\,v_2}{T_2\,v'_2}$$

Но

$$\frac{v_2}{v'_2} = \frac{M_2 + M}{M_2}$$

слѣдовательно найдемъ:

$$\frac{p_2'}{p_2} = \frac{M_2 + M}{M_2} \times \frac{T_2'}{T_2}$$

или, если вмѣсто T'_2 подставимъ его значеніе, выведенное изъ уравненія (11), —

$$\frac{p_2'}{p_2} = 1 + \frac{M_1T_1}{M_2T_2}\left[1 - \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right] \tag{12}$$

Уравненія (9), (10), (11) и (12) опредѣляютъ состояніе газа въ обоихъ сосудахъ въ функціи перешедшаго вѣса его M.

116. Коль скоро давленія p'_1 и p'_2 въ обоихъ сосудахъ сдѣлаются равными, — истеченіе прекратится. И такъ, полагая равными выраженія для этихъ двухъ давленій, получимъ:

$$p_1\left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}} = p_2\left\{1 + \frac{M_1\,T_1}{M_2\,T_2}\left[1 - \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right]\right\}$$

Съ помощью этого уравненія можно вычислить вѣсъ вытекшаго газа, потому что

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1v_1}{p_2v_2}$$

и

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{V_1v_2}{V_2v_1}$$

Отсюда

$$\frac{M_1\,T_1}{M_2\,T_2} = \frac{V_1\,p_1}{V_2\,p_2}$$

Если это значенiе вставить въ предъидущее уравненiе, то

$$\left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{c}{c}}\left(p_1 + p_1\,\frac{V_1}{V_2}\right) = p_2\left(1 + \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}\right)$$

и, слѣдовательно,

$$(13)\qquad M = M_1\left\{1 - \left[\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1 (V_1 + V_2)}\right]^{\frac{c}{C}}\right\}$$

а уравненiе (10) перейдетъ въ слѣдующее:

$$(14)\qquad \frac{T_1'}{T_1} = \left[\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1 (V_1 + V_2)}\right]^{\frac{C-c}{C}}$$

117. Чтобы примѣнить эту формулу къ тому случаю, когда истеченiе изъ сосуда A происходитъ въ атмосферу,—достаточно положить безконечно большими массу M_2, а также и объемъ V_2 сосуда B. При этомъ уравненiя (13) и (14) сведутся на

$$(15)\qquad M = M_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{c}{C}}\right]$$

$$(16)\qquad \frac{T_1'}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{C-c}{C}}$$

Уравненiе (11) перейдетъ въ $T_2' = T_2$, что̀ ясно и a priori.

Ч и с л о в о й п р и м ѣ р ъ. Положимъ, что объемъ сосуда A равняется 1 кубическому метру, и пусть въ немъ содержится сухой воздухъ при температурѣ 30^0 и при давленiи 5 атмосферъ; тогда вѣсъ газа будетъ 5,8256 килограммовъ. Истеченiе прекратится, когда давленiе въ сосудѣ будетъ равно одной атмосферѣ, а потому

$$M = M_1\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{c}{C}}\right] = 3{,}9652 \text{ килограммамъ.}$$

$$T_1' = 190^0;\ \text{слѣдовательно}\ t'_1 = -83^0$$

Такимъ образомъ истеченiе газа сопровождается значительнымъ пониженiемъ температуры.

118. Теперь мы въ состоянiи подробнѣе разсмотрѣть тѣ опыты, которыми Джуль доказалъ, что внутреннею работою газа можно пренебречь (n^o54).—Предположимъ, что сосудъ A наполненъ газомъ, а сосудъ B, напротивъ того, пустой: этимъ мы только вставляемъ въ общiя уравненiя $M_2 = 0$ и $p_2 = 0$. Въ настоящемъ случаѣ нѣтъ надобности обращать вниманiе на извѣстную начальную температуру въ пустомъ сосудѣ, потому что понятiе о температурѣ предполагаетъ непремѣнно присутствiе вѣсомой матерiи. Въ теорiи волненiя свободный эфиръ разсматривается какъ совершенно упругая среда, служащая для распространенiя волнообразнаго движенiя; по прохожденiи же волны она приходитъ въ покой. Равнымъ образомъ свободный эфиръ разсматривается какъ среда, обладающая тѣмъ свойствомъ, что она, не ослабляя, передаетъ силу, выходящую изъ какого нибудь источника, причемъ въ ней ровно ничего не остается отъ этой силы.

Въ такомъ случаѣ вѣсъ M вытекшаго газа, по уравненiю (13), будетъ:

$$(17)\qquad M = M_1\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^{\frac{c}{C}}\right]$$

Откуда

$$\frac{M_1 - M}{M_1} = \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^{\frac{c}{C}}$$

а потому уравненiя (9), (10) и (11) будутъ:

$$(18)\qquad p'_1 = p'_2 = p_1\left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}} = p_1\,\frac{V_1}{V_1 + V_2}$$

$$(19)\qquad T'_1 = T_1\left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C-c}{c}} = T_1\left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^{\frac{C-c}{C}}$$

$$(20) \quad T_2' = T_1 \frac{M_1}{M}\left[1-\left(\frac{M_1-M}{M_1}\right)^{\frac{c}{c}}\right] = T_1 \frac{1-\dfrac{V_1}{V_1+V_2}}{1-\left(\dfrac{V_1}{V_1+V_2}\right)^{\frac{c}{C}}}$$

Отсюда видно, что конечная температура T'_1 въ сосудѣ A, содержащемъ газъ, ниже начальной T_1, а конечная температура T'_2 въ пустомъ сосудѣ B—выше чѣмъ T_1. И такъ, истеченіе газа сопровождается охлажденіемъ въ сосудѣ A.

119. Для послѣдняго приложенія допустимъ, что сосудъ B пустой и что онъ приведенъ въ сообщеніе съ атмосферой. При этомъ достаточно принять сосудъ A безконечно большимъ, а въ формулахъ предъидущаго параграфа положить $M_1 = \infty$ и $V_1 = \infty$; тогда уравненія (18) и (19) приведутся къ $p'_1 = p'_2 = p_1$ и $T' = T_1$, что видно и a priori.

Ранѣе, чѣмъ введемъ условія разсматриваемаго случая въ уравненіе (17), мы должны преобразовать его:

$$v_1 = \frac{V_1}{M_1}, \quad M_1 = \frac{V_1}{v_1}$$

Введя это значеніе для M_1 въ уравненіе, получимъ:

$$M = \frac{V_1}{v_1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_1+V_2}\right)^{\frac{c}{C}}\right]$$

или

$$M = \frac{V_1}{v_1}\left[1-\frac{1}{\left(1+\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c}{C}}}\right] = \frac{V_1}{v_1}\left[1-\left(1+\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{c}{C}}\right]$$

Если это выраженіе развернуть въ строку, то получимъ:

$$M = \frac{V_1}{v_1}\left[\frac{c}{C}\frac{V_2}{V_1} + B\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + \cdots\cdot\right]$$

Такъ какъ объемъ V_1 безконечно великъ, то правая часть приведется къ первому члену и, слѣдовательно,

$$(21) \quad M = \frac{c}{C}\frac{V_2}{v_1}$$

Уравненіе (20)

$$T'_2 = \frac{M_1 T_1}{M}\left[1-\left(\frac{M_1-M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right]$$

представляетъ такое же затрудненіе, какъ и предъидущее. Его можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$T'_2 = \frac{M_1 T_1}{M}\left[1-\left(1-\frac{M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right]$$

а развертывая правую часть въ строку, получимъ:

$$T'_2 = \frac{M_1 T_1}{M}\left[\frac{C}{c}\frac{M}{M_1} + B'\left(\frac{M}{M_1}\right)^2 + \cdots\cdot\right]$$

При безконечно большомъ M_1 это уравненіе сведется на

$$(22) \quad T'_2 = \frac{C}{c}T_1$$

Числовой примѣръ. Примемъ температуру атмосферы въ 20°; тогда $T_1 = 273 + 20 = 293$, а вслѣдствіе уравненія (22) $T'_2 = 413$ или $t'_2 = 140°$. Поэтому отъ быстраго входа въ сосудъ B воздухъ испытываетъ значительное повышеніе температуры.

120. Этотъ послѣдній опытъ даетъ намъ весьма простое средство опредѣлить отношеніе теплоемкостей, потому что изъ уравненія (22) непосредственно слѣдуетъ:

$$(23) \quad \frac{C}{c} = \frac{T'_2}{T_1}$$

Но такъ какъ температуру T'_2 трудно наблюдать, то раціональнѣе будетъ обратиться къ измѣренію давленія.

За входомъ газа тотчасъ же запираютъ кранъ и такимъ образомъ получаютъ въ сосудѣ B извѣстное его количество при температурѣ T'_2 и при атмосферномъ давленіи p_1; затѣмъ газъ оставляютъ охладиться до температуры T_1 окружающаго воздуха; при этомъ давленіе его будетъ p', меньшее чѣмъ p_1. Такъ какъ удѣльный объемъ остается тотъ же, то получимъ:

$$\frac{p_1}{p'}=\frac{T_2'}{T_1}$$

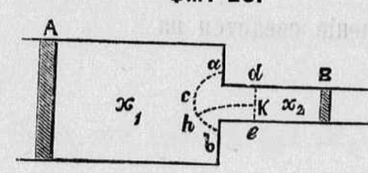
и уравненіе (23) будетъ:

$$\frac{C}{c}=\frac{p_1}{p'} \tag{24}$$

Истеченіе паровъ.

121. Разсмотримъ опять, какъ это мы сдѣлали вообще для жидкостей, два цилиндра A и B (фиг. 28), запертые двумя поршнями, между которыми находится смѣсь жидкости и пара, переходящая изъ A въ B. Пусть x_1 означаетъ количество пара въ первомъ цилиндрѣ, а x_2— количество его въ каналѣ истеченія. Далѣе, предположимъ, что во время истеченія паръ не приходитъ въ перегрѣтое состояніе, что, какъ увидимъ ниже, согласуется съ опытомъ.

Фиг. 28.



Измѣненіе состоянія происходитъ между двумя поверхностями abc и de, лежащими весьма близко къ отверстію. Разсмотримъ маленькую массу m, описывающую путь hk. По предъидущимъ разсужденіямъ ($n^0$111), мы можемъ примѣнить къ внутреннему измѣненію состоянія этой массы всѣ формулы, выведенныя въ предшествующей главѣ, при разсматриваніи измѣненія состоянія смѣси жидкости и пара. Далѣе, если примемъ, что переходъ массы m изъ точки h въ k совершается въ такое короткое время, что не происходитъ никакого обмѣна теплоты между ею и и окружающею ее

массою, то можемъ воспользоваться уравненіями (15) и (16) въ $n^0$100, а именно:

$$\frac{L_2x_2}{T_2}-\frac{L_1x_1}{T_1}=-\int_{T_1}^{T_2}\frac{m}{T}\,dT$$

$$U_2-U_1=EL_1x_1\,\frac{T_2-T_1}{T_1}+E\int_{T_1}^{T_2}m\left(1-\frac{T_2}{T}\right)dT$$

$$-(p_2v_2-p_1v_1)+\int_{p_1}^{p_2}udp$$

Если мы для U_2-U_1 вставимъ его значеніе изъ общаго уравненія

$$\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=p_1v_1-p_2v_2-(U_2-U_1) \tag{1}$$

которое нашли вообще для истеченія жидкихъ тѣлъ ($n^0$110), то получимъ уравненіе:

$$\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=EL_1\,x_1\,\frac{T_1-T_2}{T_1} \tag{25}$$

$$+E\int_{T_2}^{T_1}m\left(1-\frac{T_2}{T}\right)dT+\int_{p_2}^{p_1}udp$$

Если поперечный разрѣзъ сосуда A достаточно великъ, такъ что скоростью w_1 можно пренебречь, то это уравненіе будетъ:

$$\frac{w_2^2}{2g}=E\,L_1\,x_1\,\frac{T_1-T_2}{T_1} \tag{26}$$

$$+E\int_{T_2}^{T_1}m\left(1-\frac{T_2}{T}\right)dT+\int_{p_2}^{p_1}udp$$

Въ практическихъ приложеніяхъ удѣльный объемъ u капельной жидкости можно разсматривать постояннымъ, а коэффиціентъ m— замѣнить теплоемкостью C, смотря на нее тоже какъ на постоянную; тогда получимъ приблизительную формулу:

$$(27) \quad \frac{w_2^2}{2g} = E L_1 x_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1} + EC\left(T_1 - T_2 - T_2 \log \frac{T_1}{T_2}\right) + u(p_1 - p_2)$$

При этомъ мы предположили, что паръ въ каналѣ истеченія остается насыщеннымъ. Для оправданія такого предположенія допустимъ, что паръ въ цилиндрѣ A насыщенный и сухой; далѣе, пусть $t_1 = 152^0,2$, $p_1 = 5$ атмосф., $p_2 = 1$ атмосф. $= 10334$ килограм. Вытекая въ атмосферу, паръ, очевидно, имѣетъ температуру t_2, равную 100^0. Таблицы опытовъ Реньо даютъ для этихъ температуръ:

$$L_1 = 499$$
$$L_2 = 536$$

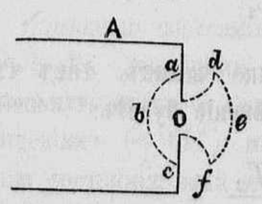
Далѣе, $u = 0{,}001$, а потому, по предъидущимъ формуламъ, получимъ:

$$x_2 = 0{,}91$$
$$w_2 = 734 \text{ метр.}$$

Слѣдовательно, паръ въ каналѣ истеченія остается не только насыщеннымъ, но даже частью сгущается въ немъ.

122. Если вмѣсто выхожденія въ атмосферу черезъ длинную наставную трубку, паръ вытекаетъ изъ сосуда A чрезъ отверстіе въ тонкой стѣнкѣ (фиг. 29), то опытъ показываетъ, что струя его чрезвычайно быстро расширяется, такъ что на маломъ разстояніи отъ отверстія, на довольно большой поверхности def, давленіе его равняется давленію атмосферы, а скорость w_2 очень мала. При этомъ невозможно допустить частнаго сгущенія пара, какъ въ предъидущемъ случаѣ.

Фиг. 29.



Положимъ, что онъ насыщенъ на площади def; тогда температура его t_2 была бы равна 100^0; далѣе, такъ какъ $T_1 > T_2$, то три члена, составляющіе правую часть уравненія (26), будутъ положительные, и для w_2 неизбѣжно получилась бы довольно большая величина. Но, вслѣдствіе быстраго расширенія паровой струи, w_2 на поверхности def, какъ мы уже сказали, очень мала; изъ чего заключаемъ, что наше предположеніе не можетъ быть допущено, и что паръ скорѣе всего находится въ перегрѣтомъ состояніи.

Мы уже нашли (n^0 111), что для всякаго измѣненія состоянія жидкости пригодно уравненіе

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \int_{p_2}^{p_1} v dp$$

которое при $w_1 = 0$ сведется на

$$\frac{w_2^2}{2g} = \int_{p_2}^{p_1} v dp$$

Это уравненіе можно примѣнить къ каждой части измѣненія состоянія и написать:

$$\frac{w^2}{2g} = \int_{p}^{p_1} v dp$$

Фиг. 30.

Легко показать, что этотъ интегралъ имѣетъ геометрическое значеніе. Пусть A (фиг. 30) будетъ начальное состояніе насыщеннаго и сухаго пара, а B—его конечное состояніе. Проведемъ чрезъ точку A кривую насыщенія L. При переходѣ изъ состоянія A въ B смѣсь слѣдуетъ по пути ADB, и если скорость w_2 въ точкѣ B почти равна нулю, то и вся площадь кривой также будетъ почти нуль, если принять ось Op за

основаніе. Очевидно, точка B должна имѣть такое положеніе, чтобы отрицательная площадь $BDD'B'$ равнялась положительной $AA'D'D$. Въ самомъ же отверстіи скорость смѣси очень велика. Такъ какъ скорость на поверхности abc (фиг. 29) равна нулю, то произойдетъ сгущеніе, увеличивающееся отъ этой поверхности къ отверстію O, а тепловая энергія перейдетъ въ видимую, т. е. въ живую силу поступательнаго движенія. При выходѣ же изъ отверстія, наоборотъ,— видимая энергія перейдетъ въ теплоту, и паръ сдѣлается перегрѣтымъ.

123. Означимъ температуру перегрѣтаго пара T', а U' — его внутреннюю энергію въ состояніи B. Такъ какъ скорости w_1 и w_2 очень малы, то уравненіе (1) сведется на

$$U' - U_1 = p_1 v_1 - p_2 v'$$

Положимъ, что мы идемъ отъ A къ B путемъ AFB (фиг. 30). Обозначимъ состояніе смѣси въ F значкомъ 2; тогда, по приближенному уравненію (14) въ n^o99, для измѣненія состоянія по линіи насыщенія AF получимъ:

$$U_2 - U_1 = E(L_2 - L_1) + EC(T_2 - T_1) - p_2 v_2 + p_1 v_1 + (p_2 - p_1)\, u$$

Для измѣненія состоянія FB перегрѣтаго пара при постоянномъ давленіи p_2 получимъ:

$$EdQ = EC'dT = dU + p_2 dv$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$U' - U_2 = EC'(T' - T_2) - p_2 (v' - v_2)$$

а потому

$$U' - U_1 = E(L_2 - L_1) + EC(T_2 - T_1) + EC'(T' - T_2) + p_1 v_1 - p_2 v' + (p_2 - p_1)\, u$$

Полагая это значеніе для $U' - U_1$ равнымъ прежде найденному, получимъ:

$$(28) \qquad C(T_2 - T_1) + C'(T' - T_2) + L_2 - L_1 + A(p_2 - p_1)\, u = 0$$

Такъ какъ давленіе p_2 дано (это есть атмосферное давленіе), T_2 — температура насыщеннаго пара при томъ же самомъ давленіи p_2, то, слѣдовательно, изъ уравненія (28) опредѣлится температура T' струи пара послѣ его расширенія.

Изъ эмпирической формулы

$$L = 606{,}50 - 0{,}695\, t$$

слѣдуетъ, что

$$L_2 - L_1 = 0{,}695\,(t_1 - t_2)$$

Далѣе, приблизительно $C = 1$, $C' = 0{,}4805$, $u = 0{,}001$. Если вставимъ эти величины въ уравненіе (28), то получимъ для практики формулу:

$$(29) \qquad t' - t_2 = 0{,}6348\,(t_1 - t_2) + 0{,}0506\,(p_1 - p_2)$$

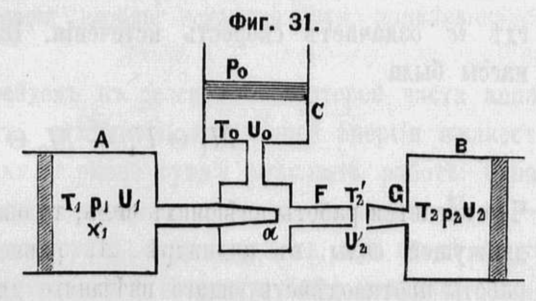
гдѣ давленія p_1 и p_2 выражены въ атмосферахъ.

Числовой примѣръ. Для $t_1 = 150^0$, $p_1 = 4{,}7$, $p_2 = 1$, $t = 100$ найдемъ, что $t' = 132^0$.

Инжекторъ Жиффара.

124. Изобрѣтенный Жиффаромъ инжекторъ предназначенъ для того, чтобы замѣнить насосъ въ паровыхъ машинахъ. Въ то время когда паровая струя выходитъ изъ котла,—питающая вода всасывается и переходитъ въ паровой котелъ. Для изученія дѣйствія этого остроумнаго аппарата, разсмотримъ цилиндръ A (фиг. 31), снабженный поршнемъ и заключающій въ себѣ количество пара x_1 при температурѣ T_1 и при давленіи p_1. Этотъ паръ выходитъ изъ трубки a и встрѣчаетъ холодную воду, приходящую изъ сосуда C, гдѣ она подвержена давленію атмосферы p_0 и находится при

Фиг. 31.



температурѣ T_0. При соприкосновеніи съ холодною водою паръ сгущается, а освободившаяся, вслѣдствія сгущенія, теплота переходитъ въ видимую энергію, такъ что капельно-жидкая струя съ большою скоростью выходитъ въ воздухъ черезъ трубку F. Затѣмъ она идетъ въ трубку G, находящуюся въ сообщеніи съ другимъ цилиндромъ B, тоже снабженнымъ поршнемъ, и достигаетъ его при температурѣ T_2 и при давленіи p_2.

Вычислимъ теперь скорость жидкости при переходѣ ея изъ трубки F въ воздухъ. — Пусть U_1 и U_0 будутъ внутренняя энергіи въ цилиндрѣ A и въ резервуарѣ C, T'_2 — температура, а U'_2 — внутренняя энергія жидкой струи въ воздухѣ, M_1 — вѣсъ пара, выходящаго изъ котла въ одну секунду, а M_0 — вѣсъ воды, уносимой этимъ паромъ. Въ безконечно малое время Θ вѣсъ выходящей жидкости изъ трубки F равенъ

$$M_1\,\Theta + M_0\,\Theta$$

Такъ какъ при этомъ не происходитъ сообщенія теплоты окружающимъ предметамъ, то измѣненіе энергіи этой жидкой массы равно работѣ внѣшнихъ силъ въ тоже самое время; полная же энергія жидкости въ F есть

$$(M_1 + M_0)\,\Theta\,\frac{w^2}{2\,g} + (M_1 + M_0)\,\Theta\,U'_2$$

гдѣ w означаетъ скорость истеченія. Начальная же энергія этой массы была

$$M_1\,\Theta\,U_1 + M_0\,\Theta\,U_0$$

Что касается работы внѣшнихъ силъ, то она состоитъ: 1) изъ работы движущей силы въ цилиндрѣ A, равной $+\,p_1\,M_1\,v_1\,\Theta$; 2) изъ работы противодѣйствующаго внѣшняго давленія въ F,

$$-\,p_0\,(M_1 + M_0)\,\Theta\,v'_2$$

3) изъ работы, производимой давленіемъ атмосферы въ сосудѣ C и давленіемъ столба жидкости, уровень которой находится на высотѣ h надъ каналомъ истеченія; она равна $+\,p_0\,M_0\,v_0\,\Theta + M_0\,\Theta\,h$. Уничтоживъ общій во всѣхъ членахъ множитель Θ, получимъ уравненіе:

$$(M_1 + M_0)\frac{w^2}{2\,g} + (M_1 + M_0)\,U'_2 - M_1\,U_1 - M_0\,U_0$$
$$= p_1\,M_1\,v_1 - p_0\,(M_1 + M_0)\,v'_2 + p_0\,M_0\,v_2 + M_0\,h$$

По уравненію (13) въ n^0 99 внутренняя энергія смѣси пара и жидкости въ цилиндрѣ A есть

$$U_1 = U_0 + EC(T_1 - T_0) + EL_1\,x_1 - p_1\,(v_1 - u)$$

а энергія жидкости, вытекающей въ воздухъ, —

$$U'_2 = U_0 + EC\,(T'_2 - T_0)$$

Вставивъ эти значенія въ предъидущее уравненіе и замѣчая, что удѣльные объемы v'_2 и v_0 могутъ быть выражены въ u, получимъ уравненіе:

$$(30)\qquad (M_1 + M_0)\frac{w^2}{2\,g} + M_0\,EC(t'_2 - t_0) + M_1\,EC(t'_2 - t_1)$$
$$= EM_1\,L_1\,x_1 + M_1\,(p_1 - p_0)\,u + M_0\,h$$

дающее возможность вычислить скорость истеченія w, если извѣстна температура t'_2 жидкости. Легко видѣть, что самый главный членъ въ правой части есть $EM_1\,L_1\,x_1$, происходящій отъ сгущенія пара. Причина же видимой энергіи вообще есть тепловая, появляющаяся отъ такого сгущенія.

125. Теперь мы перейдемъ къ разсмотрѣнію второй части аппарата и примемъ еще, что измѣненіе внутренней энергіи жидкости въ безконечно малое время Θ равно суммѣ внѣшнихъ работъ. Означимъ U_2 внутреннюю энергію единицы вѣса въ цилиндрѣ B, v_2 — его удѣльный объемъ и допустимъ, что жидкость, при входѣ ея въ цилиндръ, не имѣетъ болѣе видимой скорости; тогда получимъ уравненіе:

$$(M_1 + M_0)\,\Theta\,U_2 - (M_1 + M_0)\,\Theta\left(\frac{w^2}{2\,g} + U'_2\right)$$
$$= (M_1 + M_0)\,\Theta\,p_0\,v'_2 - (M_1 + M_0)\,\Theta\,p_2\,v_2$$

Подставивъ для U_2 и U'_2 ихъ значенія и сдѣлавши обыкновенныя упрощенія, получимъ:

$$-\frac{w^2}{2g} + EC(t_2 - t'_2) = (p_0 - p_2)\,u \tag{31}$$

Если будетъ извѣстна температура t_2 въ сосудѣ B, то это уравненіе дастъ возможность вычислить давленіе p_2, которое въ состояніи преодолѣть жидкая струя.

Если сложить уравненіе (30) съ (31), умноживъ ихъ на $M_1 + M_0$, то всѣ члены, относящіеся къ промежуточнымъ состояніямъ, исчезнутъ и получится:

$$\begin{aligned} EC[M_0(t_2 - t_0) + M_1(t_2 - t_1)] &= EM_1 L_1 x_1 \\ &+ M_0(p_0 - p_2)\,u + M_1(p_1 - p_2)\,u + M_0 h \end{aligned} \tag{32}$$

Это уравненіе можно было бы написать непосредственно, приложивъ уравненіе работъ къ начальному и конечному состояніямъ.

Въ практикѣ оба цилиндра A и B представляютъ части одного и того же котла, а давленія p_1 и p_2 равны между собою. Кромѣ того, резервуаръ C для жидкости находится ниже канала истеченія, а потому h слѣдуетъ замѣнить $-h'$. Потомъ можно вычислить то количество холодной воды, которое будетъ уноситься даннымъ вѣсомъ пара. Уравненіе (32) дастъ:

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{EL_1 x_1 + EC(t_1 - t_2)}{EC(t_2 - t_0) + (p_1 - p_0)\,u + h'}$$

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{L_1 x_1 + C(t_1 - t_2)}{C(t_2 - t_0) + Ah' + A(p_1 - p_0)\,u} \tag{33}$$

Такимъ образомъ, выходящая изъ котла струя пара замѣняетъ дѣйствіе всасывающаго и нагнетательнаго насоса, вбирающаго въ себя воду изъ резервуара и нагнетающаго ее въ котелъ. — Послѣднимъ

членомъ $A(p_1 - p_0)\,u$ можно пренебречь и принять за приблизительное значеніе

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{L_1 x_1 + C(t_1 - t_2)}{C(t_2 - t_0) + Ah'} \tag{34}$$

Наконецъ, если мы предположимъ, что выдѣляемый котломъ паръ сухой, а переведенная жидкость имѣетъ температуру котла, то $x_1 = 1$, $t_2 = t_1$ и получимъ:

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{L_1}{C(t_1 - t_0) + Ah'} \tag{35}$$

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

О плавленіи и объ отвердѣваніи.

Переходъ изъ жидкаго въ твердое состояніе. — Измѣненіе состоянія смѣси изъ жидкаго и твердаго вещества.—Температура таянія льда.

Переходъ изъ жидкаго въ твердое состояніе.

126. Если постепенно нагрѣвать твердое тѣло при опредѣленномъ давленіи, то, наконецъ, наступитъ такой моментъ, что оно начнетъ плавиться. Впродолженіе плавленія температура остается постоянною; она зависитъ отъ давленія, подъ которымъ находится тѣло, и потому есть функція его. Назовемъ ее чрезъ $t = f(p)$. Она представляетъ наивысшую температуру тѣла въ твердомъ состояніи при давленіи p. Въ то время, когда килограммъ тѣла переходитъ въ жидкое состояніе, поглощается извѣстное количество теплоты, называемое скрытою теплотою плавленія.

Обратный переходъ, изъ жидкаго въ твердое состояніе, совершается менѣе правильно: капельно-жидкое тѣло можно еще удержать жидкимъ при температурѣ ниже той, при которой, въ нормальныхъ обстоятельствахъ, наступаетъ отвердѣваніе. Далѣе, точно также, какъ и при испареніи, скрытая теплота замедленнаго отвердѣванія вообще менѣе скрытой теплоты отвердѣванія при нормальныхъ условіяхъ.

Пусть t будетъ температура, при которой тѣло въ нормальныхъ условіяхъ, подъ давленіемъ p, переходитъ въ твердое состояніе.

Мы можемъ двоякимъ образомъ перевести килограммъ этого тѣла отъ температуры t къ $t-\theta$: или заставивъ его отвердѣть при нормальной температурѣ t, затѣмъ уже охлаждать его отъ t до $t-\theta$; или сначала понизить температуру жидкости отъ t до $t-\theta$, а потомъ уже дать ей отвердѣть при этой температурѣ $t-\theta$, въ то время какъ давленіе остается тѣмъ же самымъ, а именно равнымъ p. Пусть C будетъ теплоемкость въ жидкомъ, а C' — въ твердомъ состояніи, L—скрытая теплота отвердѣванія при нормальныхъ условіяхъ, а L' — скрытая теплота при замедленномъ отвердѣваніи, при температурѣ $t-\theta$.

При первомъ способѣ измѣненія состоянія потерянная теплота будетъ

$$L + \int_{t-\theta}^{t} C'dt$$

Напротивъ того, при второмъ —

$$\int_{t-\theta}^{t} Cdt + L'$$

Оба эти количества теплоты равны между собою, потому что внѣшняя работа, а также и измѣненіе внутренней энергіи при обоихъ измѣненіяхъ состоянія одни и тѣже, слѣдовательно

$$L + \int_{t-\theta}^{t} C'dt = \int_{t-\theta}^{t} Cdt + L'$$

или

$$L' = L - \int_{t-\theta}^{t} (C - C')dt$$

Такъ какъ теплоемкость C тѣла въ жидкомъ видѣ болѣе теплоемкости C' въ твердомъ, то, слѣдовательно, скрытая теплота L при нормальныхъ условіяхъ болѣе чѣмъ L'.

Измѣненіе состоянія смѣси изъ жидкаго и твердаго вещества.

127. Разсмотримъ смѣсь изъ жидкаго и твердаго вещества, вѣсъ которой равенъ 1 килограмму. Пусть x будетъ вѣсъ твердой составной части, $1 - x$ жидкой; далѣе, если u и u' — удѣльные объемы жидкаго и твердаго тѣла, то удѣльный объемъ смѣси будетъ

$$v = u(1 - x) + u'x = u + (u' - u)\,x \tag{1}$$

Возьмемъ, какъ сдѣлали это для смѣси жидкости и пара, за перемѣнныя независимыя t и x. Положимъ, что смѣсь претерпѣваетъ безконечно-малое измѣненіе состоянія, при которомъ она переходитъ изъ состоянія (t, x) въ состояніе $(t + dt,\ x + dx)$; тогда необходимое для такого измѣненія количество теплоты будетъ

$$dQ = (1 - x)\left(C + h\frac{dp}{dt}\right)dt + x\left(C' + h'\frac{dp}{dt}\right)dt - L\,dx$$

при чемъ буквы со значками относятся къ твердому состоянію. Это уравненіе такое же какъ и то, которое мы нашли ($n^o 89$) для измѣненія состоянія смѣси жидкости и пара, за исключеніемъ послѣдняго члена $L\,dx$, относящагося къ отвердѣванію вѣса dx и имѣющаго противоположный знакъ.

Если положимъ, что

$$C + h\frac{dp}{dt} = m$$

$$C' + h'\frac{dp}{dt} = m'$$

то

$$dQ = [m + (m' - m)\,x]\,dt - L\,dx \tag{2}$$

Произведенная же внѣшняя работа будетъ

$$dS = pdv = p\left[\frac{du}{dt} + x\frac{d(u' - u)}{dt}\right]dt + p\,(u' - u)\,dx$$

и, слѣдовательно, съ помощью главнаго уравненія

$$dQ = A\,(dU + pdv) \tag{a}$$

для измѣненія внутренней энергіи получимъ:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} A\,dU = &\left[m + (m' - m)\,x - A\,p\frac{du}{dt} - Apx\frac{d(u' - u)}{dt}\right]dt \\ &-\Big[L + Ap\,(u' - u)\Big]\,dx \end{aligned}\right.$$

128. Правая часть этого уравненія есть полный дифференціалъ, а потому

$$A\frac{dU}{dt} = m + (m' - m)\,x - Ap\frac{du}{dt} - Apx\frac{d(u' - u)}{dt}$$

$$A\frac{dU}{dx} = -L - Ap\,(u' - u)$$

и, слѣдовательно,

$$A\frac{d^2U}{dt\,dx} = m' - m - Ap\frac{d(u' - u)}{dt}$$

$$A\frac{d^2U}{dx\,dt} = -\frac{dL}{dt} - A\,(u' - u)\frac{dp}{dt} - Ap\frac{d(u' - u)}{dt}$$

Положивъ обѣ эти производныя втораго порядка равными между собою, получимъ уравненіе Клаузіуса:

$$-\frac{dL}{dt} + m - m' = A\,(u' - u)\frac{dp}{dt} \tag{α}$$

Далѣе имѣемъ:

$$\frac{dQ}{T} = \frac{m + (m' - m)\,x}{T}\,dT - \frac{L}{T}\,dx$$

По второму началу $\frac{dQ}{T} = d\mu$, правая часть представляетъ полный

дифференціалъ функціи μ обѣихъ перемѣнныхъ независимыхъ t и x. Отсюда получится отношеніе В. Томсона:

$$(\beta) \qquad \frac{d\left(\frac{L}{T}\right)}{dT} = \frac{m - m'}{T}$$

которое можно привести къ виду:

$$(\beta_1) \qquad \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T} = m - m'$$

Наконецъ, сличая уравненія (α) и (β_1), придемъ къ третьему отношенію:

$$(\gamma) \qquad \frac{L}{T} = A(u - u')\frac{dp}{dT}$$

Температура таянія льда.

129. Это послѣднее уравненіе даетъ поводъ къ нѣкоторымъ важнымъ замѣчаніямъ. Такъ какъ скрытая теплота L всегда положительная, то $u - u'$ и $\frac{dp}{dT}$ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ. Большая часть тѣлъ, превращаясь въ жидкость, занимаетъ большій объемъ, то есть для этихъ тѣлъ $u - u'$ положительная; отсюда заключаютъ, что и $\frac{dp}{dt}$ тоже положительная; слѣдовательно, нормальная температура таянія тѣмъ выше, чѣмъ сильнѣе давленіе. Справедливость такого слѣдствія теоріи Бунзенъ доказалъ для спермацета и парафина. Увеличивая давленіе отъ 1 до 156 атмосферъ, онъ наблюдалъ, что температура плавленія спермацета возвышалась съ $47^0,7$ до $59^0,9$. Вѣроятно, подтвержденіе этого закона можно найти и въ геологіи: массы скалъ, будучи подвержены огромнымъ давленіямъ, могли еще оставаться въ твердомъ состояніи при весьма высокой температурѣ.

Но бываютъ такія тѣла, а ледъ принадлежитъ къ числу ихъ, которыя, становясь жидкими, занимаютъ меньшій объемъ; при этомъ разность $u - u'$, а равнымъ образомъ и $\frac{dp}{dt}$ отрицательныя. Отсюда заключаютъ, что температура плавленія опускается тѣмъ ниже, чѣмъ сильнѣе давленіе. И такъ, если ледъ подвергнутъ весьма сильному давленію, то онъ уже таетъ при болѣе низкой температурѣ, чѣмъ 0^0. Мы даже можемъ вычислить пониженіе температуры; а именно изъ уравненія (γ) получимъ:

$$\frac{dT}{dp} = -A(u' - u)\frac{T}{L}$$

Положимъ, что давленіе p равно атмосферѣ; тогда для воды $T = 273^0$, $L = 79{,}25$, $u = 0{,}001$, $u' = \frac{1}{923}$; отсюда

$$\frac{dT}{dp} = -0{,}0070$$

И такъ, приращеніе давленія на одну атмосферу соотвѣтствуетъ убыли въ температурѣ таянія льда приблизительно на 0,0070 градуса. Джемсъ Томсонъ первый вывелъ такое свойство льда какъ необходимое слѣдствіе теоремы Карно, а его братъ В. Томсонъ доказалъ справедливость этого опытомъ [1]). Для каждой атмосферы онъ нашелъ пониженіе около $0^0{,}0075$, — результатъ, весьма мало отличающійся отъ предъидущаго. Муссонъ, съ помощью очень остроумнаго аппарата, могъ понижать температуру таянія льда до -18°, употребляя весьма значительное давленіе. *)

---

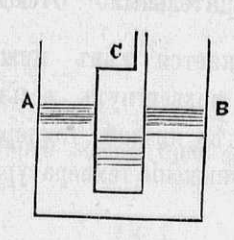
[1]) Proceedings of the Royal Soc. of Edinburgh, February 1850 и Philosophical Magazine S. III, Vol. 37 s. 123.

*) Объ этихъ опытахъ читатель найдетъ въ «полномъ курсѣ физики по сочиненіямъ Жамена и Вюльнера», составл. Филипповымъ и Д. Аверкіевымъ, т. II, стр. 116 и проч. С. Петербургъ, 1866 года, а также въ приведенномъ къ этой статьѣ примѣчаніи: Pogg. Ann. Bd. CV.

Примѣч. перев.

130. Весьма простой опытъ Гельмгольтца показываетъ обратное, т. е. что съ уменьшеніемъ давленія температура таянія льда возвышается. Въ сосудъ AB (фиг. 32), гдѣ находится тающій ледъ, погружаютъ металлическій сосудъ C, содержащій воду и отчасти разрѣженный воздухъ. Въ то время какъ снаружи таетъ ледъ, въ сосудѣ C замѣчаютъ образованіе его кристалловъ. Отсюда можно заключить, что вода въ цилиндрѣ C замерзаетъ при температурѣ нѣсколько высшей, чѣмъ 0 градусовъ.

Фиг. 32.



Такимъ же образомъ можно объяснить замѣчательные опыты Тиндаля и Фарадея. Опытъ Тиндаля состоитъ въ томъ, что толченый ледъ помѣщаютъ между двумя формами изъ очень твердаго бука, въ соприкасающихся поверхностяхъ которыхъ находится чечевицеобразное углубленіе [1]). Затѣмъ его сильно сжимаютъ между формами, и если ихъ потомъ разнять, то окажется, что образовалась совершенно однородная и прозрачная ледяная чечевица. Ледъ по крайней мѣрѣ отчасти растаялъ во время сжатія, а образовавшаяся жидкость снова отвердѣла при атмосферномъ давленіи. Фарадей сдѣлалъ извѣстнымъ это явленіе подъ именемъ перезамерзанія (regelation. [2]) Совершенно достаточно привести въ соприкосновеніе, при умѣренномъ давленіи, два куска льда, чтобы убѣдиться, что они примерзнутъ другъ къ другу. Если два тѣла соприкасаются въ элементѣ поверхности w, и одно изъ нихъ давитъ на другое съ силою F, то приходящееся на единицу площади давленіе будетъ $p = \frac{F}{w}$.

[1]) Die Wärme betrachtet als eine Art der Bewegung von John Tyndall, нѣмецкое изданіе Г. Гельмгольтца и Г. Видемана. Braunschweig, 1867, S. 241 *).

[2]) Ueber die Regelation der Schneekörner: Tyndall, Philosophical Magazine 1862. Vol. XXIII pag. 312.

*) Теплота, разсматриваемая какъ родъ движенія, перев. подъ редакціей А. П. Шимкова, 1864 года, стр. 145 и проч. *Прим. переводч.*

Оно можетъ быть чрезвычайно велико, если w мало. Разсмотримъ теперь два куска льда при температурѣ $t°$. Давленіе, дѣйствующее въ точкѣ соприкосновенія, понизитъ температуру таянія, и въ этомъ мѣстѣ растаетъ небольшое количество льда. Выходящая отсюда вода распространится вокругъ, а такъ какъ она не находится уже подъ тѣмъ же самымъ давленіемъ, то снова замерзнетъ. Чѣмъ продолжительнѣе это явленіе, тѣмъ болѣе увеличивается площадь соприкосновенія w, а давленіе p становится все меньше и меньше. Это явленіе совершенно прекратится, когда давленіе p сдѣлается меньше того, которое соотвѣтствуетъ температурѣ t.

Тоже самое произойдетъ, если куски льда сжимать въ сосудѣ; они соприкасаются углами, и здѣсь происходитъ самое сильное давленіе: углы таютъ, куски сдвигаются и опять соприкасаются въ точкахъ, которыя также таютъ, между тѣмъ какъ вода, образовавшаяся при такомъ процессѣ, наполняетъ промежутки и, не будучи подвержена прежнему давленію, снова замерзаетъ; наконецъ, получается кусокъ льда, имѣющій форму сосуда.

Но, какъ показалъ Бертенъ, такой кусокъ льда отличается своими оптическими свойствами отъ натуральнаго. Послѣдній состоитъ только изъ кристалловъ, имѣющихъ одно и тоже направленіе, и даетъ явленія цвѣтной поляризаціи; между тѣмъ какъ первый представляетъ скопленіе кусковъ, расположенныхъ по всевозможнымъ направленіямъ, и потому играетъ роль куска стекла.

Эти явленія, зависящія отъ давленія, играютъ важную роль въ образованіи глетчеровъ [1]). Извѣстно, что они движутся подобно рѣкамъ. По наблюденіямъ Тиндаля, Монтанвертскій Меръ-де-Гласъ въ Шамуни подвигается ежедневно зимою приблизительно на 4 дециметра, а лѣтомъ на $7\frac{1}{2}$. Давленіе массы льда на основаніе производитъ мѣстное таяніе и служитъ причиною скольженія по скаламъ, образующимъ ложе глетчера.

[1]) Die Wärme betrachtet als eine Art der Bewegung von John Tyndall, Braunschweig, 1867, S. 250 *).

*) Теплота, разсматриваемая какъ родъ движенія, перев. подъ редакціей Шимкова, С. Петербургъ, 1864 года, стр. 143 и прибавленіе къ VI лекціи, стр. 150 и проч. *Примѣч. перев.*

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Общее измѣненіе состоянія тѣлъ.

Коэффиціентъ кубическаго расширенія и сжатія. — Цилиндрическій прутъ или проволока.—Особенное явленіе въ каучукѣ.

131. Мы знаемъ, что существуетъ отношеніе

$$\varphi\,(t,\ v,\ p) = 0$$

между температурою, удѣльнымъ объемомъ и давленіемъ. Это отношеніе извѣстно только для однихъ совершенныхъ газовъ. Если представимъ себѣ такое уравненіе разрѣшеннымъ относительно v, то мы можемъ разсматривать удѣльный объемъ какъ функцію двухъ перемѣнныхъ независимыхъ t и p. Для ближайшаго изслѣдованія этой функціи нужно опредѣлить опытнымъ путемъ обѣ частныя производныя $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{dv}{dp}$ для различной системы значеній t и p.

1) Оставимъ p постояннымъ, а будемъ измѣнять t и станемъ затѣмъ наблюдать измѣненія объема. Эти наблюденія приведутъ къ такъ называемому к о э ф ф и ц і е н т у к у б и ч е с к а г о р а с ш и р е н і я п р и п о с т о я н н о м ъ д а в л е н і и. Если означимъ его α, то

$$\alpha = \frac{1}{v}\,\frac{dv}{dt}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dv}{dt} = \alpha\, v \qquad (1)$$

2) Оставимъ t постояннымъ, а будемъ измѣнять p и затѣмъ станемъ наблюдать измѣненія объема. Эти наблюденія приведутъ къ

к о э ф ф и ц і е н т у к у б и ч е с к а г о с ж а т і я при постоянной температурѣ. Означивъ его β, получимъ:

$$\beta = -\,\frac{1}{v}\,\frac{dv}{dp}$$

слѣдовательно,

$$\frac{dv}{dp} = -\,\beta\, v \qquad (2)$$

Два различныхъ ряда опытовъ, при которыхъ измѣняются t и p, дадутъ обѣ функціи $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{dv}{dp}$ въ зависимости отъ t и p. Посредствомъ интегрированія полнаго дифференціальнаго уравненія

$$dv = \frac{dv}{dt}\,dt + \frac{dv}{dp}\,dp$$

или

$$\frac{dv}{v} = \alpha dt - \beta dp \qquad (3)$$

можно было бы узнать функцію $v = f\,(t,p)$

132. Найдя эту функцію, можно было бы затѣмъ опредѣлить и внутреннюю энергію. Ее можно было бы найти изъ главнаго уравненія:

$$dU = EdQ - pdv \qquad (a)$$

коль скоро извѣстенъ dQ. Въ $n^o 41$ мы положили, что

$$dQ = Cdt + hdp$$

C опредѣляется прямо изъ опыта. Изъ уравненія же (β_3) *В.* Томсона ($n^o 73$)

$$h = -\,AT\,\frac{dv}{dT}$$

и, далѣе, съ помощью уравненія (1), получимъ:

$$h = -\,A\alpha v T \qquad (4)$$

Если теперь поставимъ для h и dv ихъ значенія (4) и (3), то получимъ:

$$dU = (EC - \alpha v p)\,dT + v\,(\beta p - \alpha T)\,dp \qquad (5)$$

а интегрированіе этого полнаго дифференціальнаго уравненія привело бы къ узнанію функціи U отъ T и p.

Но dQ можно получить еще и другимъ образомъ. Раньше мы положили ($n^o 40$), что

$$dQ = cdt + ldv$$

Если ввести для dv его значеніе (3), то

$$dQ = (c + \alpha lv)\, dt - \beta l\, v\, dp$$

Если положить это уравненіе равнымъ предъидущему, то

$$c + \alpha lv = C, \quad \beta lv = -h = A\alpha v T$$

слѣдовательно,

$$(6) \qquad l = \frac{A\alpha T}{\beta}$$

$$(7) \qquad C - c = \frac{A\alpha^2 v T}{\beta}$$

Какъ мы уже сказали, C опредѣляется непосредственно изъ опыта, c получается изъ уравненія (7) и, наконецъ, l—изъ уравненія (6). Такимъ образомъ получится дифференціальное выраженіе:

$$(8) \qquad dU = \left(EC - \frac{\alpha^2 v T}{\beta}\right) dT + \left(\frac{\alpha T}{\beta} - p\right) dv$$

Посредствомъ интегрированія отсюда получилось бы U.

133. Пусть тѣло сжимается очень быстро, такъ что не можетъ произойти обмѣна теплоты между нимъ и окружающими его тѣлами; тогда температура этого тѣла будетъ функціей давленія и опредѣлится уравненіемъ:

$$0 = dQ = Cdt + hdp$$

Отсюда

$$(9) \qquad \frac{dt}{dp} = \frac{A\alpha v T}{C}$$

Знакъ у dt тотъ же самый, какъ и у коеффиціента кубическаго расширенія α. Вообще же, если α положительная, то и dt также положительный, т. е. сжатіе возвышаетъ температуру тѣла; но для

воды ниже 4 градусовъ α отрицательная, слѣдовательно, при этомъ, и dt также отрицательный; а потому сжатіе производитъ пониженіе температуры. Справедливость такого слѣдствія Джуль доказалъ опытнымъ путемъ.

Цилиндрическій прутъ или проволока.

134. До сихъ поръ мы принимали, что вся поверхность тѣла подвержена нормальному, повсюду одинаковому давленію. Въ особомъ случаѣ, о которомъ теперь будемъ говоритъ, мы оставимъ такое предположеніе.—Разсмотримъ однородный цилиндрическій прутъ, боковая поверхность котораго подвержена постоянному, повсюду одинаковому давленію p_0 на квадратный метръ, и на концы котораго дѣйствуетъ перемѣнное давленіе $\omega p_0 + p$, при чемъ ω означаетъ поперечный разрѣзъ. Назовемъ длину прута чрезъ x; тогда очевидно, что между тремя величинами t, x и p существуетъ отношеніе:

$$(10) \qquad \varphi(t,\ x,\ p) = 0$$

изъ нихъ каждыя двѣ могутъ быть произвольно приняты за перемѣнныя независимыя. При безконечно маломъ измѣненіи произведенная прутомъ внѣшняя работа будетъ

$$dS = p_0 dv + pdx$$

а потому первое главное уравненіе

$$dQ = A\,(dU + dS)$$

перейдетъ въ

$$(11) \qquad dQ = A\,(dU + p_0 dv + pdx)$$

1) Если возьмемъ t и x за перемѣнныя независимыя, то это уравненіе будетъ:

$$dQ = A\left(\frac{dU}{dt} + p_0 \frac{dv}{dt}\right) dt + A\left(\frac{dU}{dx} + p_0 \frac{dv}{dx} + p\right) dx$$

а полагая

$$c = A\left(\frac{dU}{dt} + p_0\frac{dv}{dt}\right)$$

$$l = A\left(\frac{dU}{dx} + p_0\frac{dv}{dx} + p\right)$$

это уравненіе приметъ простой видъ:

$$(12) \qquad dQ = cdt + ldx$$

Далѣе между c и l получится отношеніе:

$$(13) \qquad \frac{dl}{dt} - \frac{dc}{dx} = A\frac{dp}{dt}$$

2) Если мы примемъ за перемѣнныя независимыя t и p, то главное уравненіе будетъ:

$$dQ = A\left(\frac{dU}{dt} + p_0\frac{dv}{dt} + p\frac{dx}{dt}\right)dt + A\left(\frac{dU}{dp} + p_0\frac{dv}{dp} + p\frac{dx}{dp}\right)dp$$

Если положимъ, что

$$C = A\left(\frac{dU}{dt} + p_0\frac{dv}{dt} + p\frac{dx}{dt}\right)$$

$$h = A\left(\frac{dU}{dp} + p_0\frac{dv}{dp} + p\frac{dx}{dp}\right)$$

то уравненіе приметъ простой видъ:

$$(14) \qquad dQ = Cdt + hdp$$

Далѣе, между C и h получится отношеніе:

$$(15) \qquad \frac{dh}{dt} - \frac{dC}{dp} = -A\frac{dx}{dt}$$

135. Равнымъ образомъ къ измѣненію прута можно приложить теорему Карно, а также и слѣдствія, которыя мы вывели изъ нея.

И здѣсь $\lambda = T$, а выраженіе $\frac{dQ}{T}$ есть полный дифференціалъ функціи μ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ.

1) Если возьмемъ за перемѣнныя независимыя t и x, то полный дифференціалъ

$$\frac{dQ}{T} = \frac{c}{T}dt + \frac{l}{T}dx$$

приведетъ къ отношенію ($n^o 72$):

$$(16) \qquad l = AT\frac{dp}{dT}$$

2) Если примемъ за перемѣнныя независимыя t и p, то получится также отношеніе ($n^o 73$):

$$(17) \qquad h = -AT\frac{dx}{dT}$$

136. Для большаго числа веществъ коеффиціентъ линейнаго расширенія при постоянномъ давленіи

$$\alpha = \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$$

извѣстенъ изъ наблюденій. Вслѣдствіе уравненія (17) получится:

$$(18) \qquad h = -A\alpha x T$$

Равнымъ образомъ наблюдали и коеффиціентъ линейнаго сжатія при постоянной температурѣ

$$\beta = -\frac{1}{x}\frac{dx}{dp}$$

Если теперь будемъ разсматривать x какъ функцію отъ t и p, опредѣляемую уравненіемъ (10), то получимъ:

$$dx = \frac{dx}{dt}dt + \frac{dx}{dp}dp = x(\alpha dt - \beta dp)$$

$$dQ = cdt + ldx = (c + \alpha lx)\,dt - \beta lxdp$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$C = c + \alpha l x,\quad h = -\beta l x$$

И такъ,

(19) $$l = \frac{A\alpha T}{\beta}$$

(20) $$C - c = \frac{A\alpha^2 x T}{\beta}$$

Допустимъ, что прутъ сжимается мгновенно, такъ что не происходитъ передачи теплоты окружающимъ тѣламъ; тогда

$$0 = dQ = Cdt + hdp$$

И такъ,

(21) $$\frac{dt}{dp} = \frac{A\alpha x T}{C}$$

Для примѣненія этихъ формулъ къ нити, растягиваемой съ обоихъ концовъ равными силами, стоитъ только перемѣнить знакъ у p. Положимъ, что $p = -p'$; тогда предъидущее уравненіе перейдетъ въ

(22) $$\frac{dt}{dp'} = -\frac{A\alpha x T}{C}$$

Но знакъ у dt противоположенъ знаку у α. Такъ какъ вообще коеффиціентъ линейнаго расширенія положительный, то отсюда заключаемъ, что удлиненіе нити обыкновенно сопровождается пониженіемъ температуры.

Особенное явленіе въ каучукѣ.

137. Каучукъ представляетъ изъ этого исключеніе. Если растягивать кусокъ его посредствомъ груза и возвышать температуру, то онъ уменьшится въ своей длинѣ; слѣдовательно коеффиціентъ α будетъ отрицательный, а потому $\frac{dt}{dp'}$ положительная. Отсюда выходитъ, что если каучукъ растянуть мгновенно, то температура его повысится.

Это явленіе впервые было наблюдаемо Гоффомъ, а весьма точные опыты по этому вопросу были произведены Джулемъ съ вулканизированнымъ каучукомъ [1]).

Джуль замѣтилъ, что если кусокъ каучука подверженъ со всѣхъ сторонъ равномѣрному давленію, то объемъ его увеличивается съ возрастаніемъ температуры. Такимъ образомъ коеффиціентъ кубическаго расширенія положительный и равенъ 0,000256. Далѣе, если кусокъ каучука растягивается грузомъ p', то существуетъ такой предѣлъ p'_1, что когда растягивающій грузъ p' менѣе p'_1, то возвышеніе температуры производитъ удлиненіе и, напротивъ того, — если p' болѣе чѣмъ p'_1, то возвышеніе температуры производитъ укорачиваніе. Въ первомъ случаѣ, когда α положительная, мгновенное увеличеніе растягивающаго усилія произведетъ пониженіе температуры, а во второмъ, когда α отрицательная, — мгновенное увеличеніе растягивающаго усилія произведетъ повышеніе температуры.

---

[1]) Joule, Philosohpical Magazine 1857, vol. XIV. p. 227.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Теорія газовъ.

Основная гипотеза.—Объясненіе давленія.—Законъ Маріотта.—Законъ смѣшенія. — Дѣйствительная энергія газовъ. — Превращеніе внѣшней работы въ тепловую энергію и обратно.—Твердое и жидкое состоянія.—Испареніе.—Парообразованіе въ неограниченномъ пространствѣ.—Распространеніе колебаній въ газахъ. — Законы соединеній газовъ. — Законъ Дюлонга и Пти.

Основная гипотеза.

138. Основная гипотеза, представляющая фундаментъ теоріи газовъ, состоитъ въ томъ допущеніи, что молекули тѣла въ газообразномъ состояніи не производятъ другъ на друга замѣтнаго дѣйствія. Эта гипотеза есть слѣдствіе опыта, такъ какъ Джуль доказалъ, что внутренняя работа въ газахъ равна нулю.

Вмѣсто допущенія, что газовыя молекули колеблются около своего положенія равновѣсія, какъ въ твердыхъ тѣлахъ, мы предположимъ, что онѣ находятся въ чрезвычайно быстромъ поступательномъ движеніи, которое прямолинейно и равномѣрно и совершается по всевозможнымъ направленіямъ. Молекули газа находятся вообщее въ такомъ разстояніи другъ отъ друга, что частичныя силы не войдутъ въ разсмотрѣніе; исключеніе изъ этого бываетъ только при извѣстныхъ разстояніяхъ, втеченіе относительно весьма короткаго промежутка времени, а именно: когда двѣ молекули проходятъ на своемъ пути очень близко другъ къ другу. Впродол-

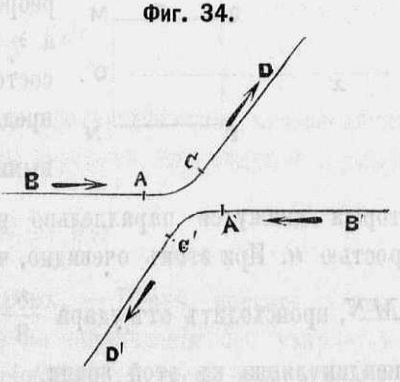
женіе этого, весьма короткаго, промежутка времени происходитъ полное дѣйствіе частичныхъ силъ, и движеніе измѣняется: происходитъ, какъ говорятъ, ударъ между двумя молекулями.—Разсмотримъ сначала двѣ равныя частицы m и m' (фиг. 33), движущіяся въ противоположномъ направленіи на одной и той же прямой со скоростью u. Если разстояніе между молекулями будетъ очень мало, то частичныя силы начнутъ дѣйствовать съ большимъ напряженіемъ, и такъ какъ онѣ при этомъ отталкивательныя, то скорость мало по малу уменьшается, пока, при разстояніи BB', ни сдѣлается равною нулю. Отсюда частицы снова удалятся другъ отъ друга, и при разстояніи AA' опять пріобрѣтутъ прежнюю скорость u, но противоположную по направленію. Молекули обмѣнялись своими скоростями, и все совершилось такъ, какъ будто бы онѣ прошли мимо, не произведя другъ на друга никакого дѣйствія. Слѣдовательно, такого роды удары не могутъ имѣть вліянія на общее состояніе газа.

Фиг. 33.

m m'
A B B' A'

Разсмотримъ теперь двѣ молекули, движущіяся по двумъ различнымъ прямымъ BA и $B'A'$ и проходящія весьма близко другъ отъ друга. Взаимное дѣйствіе будетъ замѣтно только въ положеніи AA' (фиг. 34): каждая молекуля опишетъ небольшую кривую и затѣмъ удалится по другой прямой линіи. Такіе удары не уменьшаютъ суммы живыхъ силъ, а такъ какъ частицы движутся по всевозможнымъ направленіямъ, то ясно, что совокупное состояніе системы не измѣнится.

Фиг. 34.



И такъ, путь каждой молекули составляется изъ нѣкотораго числа прямыхъ линій, идущихъ зигзагами, изъ которыхъ каждыя двѣ, слѣдующія одна за другой, соединяются посредствомъ кривыхъ, весьма малыхъ, сравнительно съ отрѣзками прямыхъ.

Объясненіе давленія.

139. При такомъ взглядѣ на газы, давленіе, производимое заключеннымъ въ сосудѣ газомъ, на стѣнки этого сосуда происходитъ вслѣдствіе повторяющихся о нихъ ударовъ молекулей. Если частица подходитъ близко къ стѣнкѣ, то наступаетъ дѣйствіе отталкивательныхъ силъ между этою частицею и молекулями стѣнки; онѣ очень скоро уничтожаютъ слагающую скорости частицы, перпендикулярную къ стѣнкѣ, и сообщаютъ ей при этомъ равную, но противоположную скорость. Вслѣдствіе большаго числа ударовъ, отъ совокупности ихъ, происходитъ дѣйствіе продолжительнаго давленія.

Первая идея такой гипотезы о сущности газовъ находится въ гидродинамикѣ Бернулли, вышедшей въ 1738 году. Она была снова принята Кренигомъ въ Берлинѣ, въ 1856 году, а Клаузіусъ значительно расширилъ ее.

Кренигъ объясняетъ давленіе слѣдующимъ образомъ [1]. Разсмотримъ извѣстное количество газа, заключеннаго въ маленькомъ кубѣ $MNPQ$, ребро котораго пусть будетъ a (фиг. 35), а n — число частицъ, изъ которыхъ состоитъ это количество газа. Кренигъ предполагаетъ всѣ молекули раздѣленными на три группы по $\frac{n}{3}$ частицъ, которыя движутся параллельно ребрамъ съ одной и тою же скоростью u. При этомъ очевидно, что давленіе, производимое на грань MN, происходитъ отъ удара $\frac{n}{3}$ молекулей, скорость которыхъ перпендикулярна къ этой грани.

Фиг. 35.

Если означимъ черезъ f противодѣйствіе стѣнки молекулѣ m и будемъ считать скорости положительными по направленію ox, то получимъ: $m\frac{du}{dt}=f$ или $mdu=f\,dt$. Передъ ударомъ скорость была $-u$, а послѣ удара $+u$. — Интегрируя въ предѣлахъ продолжительности удара, получимъ:

$$2mu=\int f\,dt$$

Это пригодно для удара одной только частицы. Но составляя сумму всѣхъ подобныхъ членовъ для совокупности ударовъ, производимыхъ втеченіе опредѣленнаго времени Θ о стѣнку MN, получимъ уравненіе:

$$\sum 2\,mu=\sum\int f\,dt$$

Означивъ черезъ N число ударовъ, получимъ:

$$\sum 2\,mu=2\,mu\,N$$

Съ другой стороны, положимъ, что

$$F\Theta=\sum\int f\,dt$$

гдѣ F означаетъ величину средняго противодѣйствія, производимаго стѣнкою на всѣ молекули. Такимъ образомъ предъидущее уравненіе будетъ:

$$2\,mu\times N=F\Theta$$

Теперь легко вычислить число ударовъ. — Послѣ перваго удара о стѣнку MN молекуля m движется по направленію ox, ударяется о противоположную стѣнку PQ и пріобрѣтаетъ свою первоначальную скорость; затѣмъ она снова ударяется о грань MN и т. д. Время, протекающее между двумя послѣдовательными ударами одной и той же частицы о грань MN, равно $\frac{2\,a}{u}$. Число ударовъ для одной и той же молекули въ ту же самую грань, впродолженіе времени Θ, равно

[1] Krönig, Pogg. Ann. Bd. 99, S. 315.

$\frac{\Theta u}{2a}$; а число ударовъ N, производимыхъ систимою $\frac{n}{3}$ молекулей, скорость которыхъ перпендикулярна къ грани MN, будетъ $\frac{\Theta u}{2a} \times \frac{n}{3}$. Поэтому предъидущее уравненіе перейдетъ въ слѣдующее:

$$\frac{nmu^2\Theta}{3a} = F\Theta$$

откуда

$$(1) \qquad F = \frac{nmu^2}{3a}$$

Если p означаетъ теперь давленіе, производимое на квадратный метръ, то

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{nmu^2}{3a^3}$$

и, слѣдовательно,

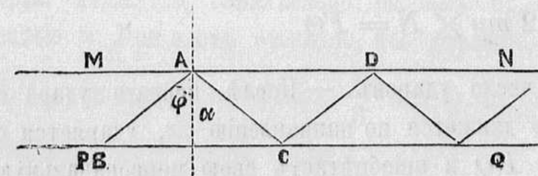
$$(2) \qquad pv = \frac{nmu^2}{3}$$

гдѣ v означаемъ объемъ куба.

140. Того же самаго результата достигъ и Клаузіусъ, не будучи вынужденъ раздѣлять молекули на три группы, движущіяся по тремъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ [1]).

Разсмотримъ большой объемъ газа между двумя параллельными плоскостями MN и PQ (фиг. 36), весьма близкими одна отъ другой, и предположимъ далѣе, что между ними движутся n молекулей по всевозможнымъ направленіямъ. Частичка, идущая по направленію BA, ударяетъ въ точкѣ A о плоскость MN, которая отражаетъ ее въ C на плоскость PQ, для новой встрѣчи ею въ точкѣ D плоскости MN и т. д. Пусть a будетъ разстояніе между обѣими плоскостями, а φ—уголъ, составляемый прямою AB съ нормалью къ плоскости; тогда путь, проходимый этою частицею во время двухъ послѣдовательныхъ ударовъ о плоскость MN, равенъ $\frac{2a}{\cos\varphi}$, а промежутокъ времени между двумя ударами равенъ $\frac{2a}{u\cos\varphi}$. Такимъ образомъ число ударовъ впродолженіе времени Θ равно

Фиг. 36.



$$\frac{\Theta u \cos\varphi}{2a}$$

Означимъ черезъ u' проэкцію скорости молекули на нормаль къ плоскости, и если, какъ прежде, f означаетъ противодѣйствіе этой плоскости частицѣ, то $m\frac{du'}{dt} = f$ или $mdu' = f\,dt$; а интегрируя въ предѣлахъ продолжительности удара, получимъ:

$$2\,mu' = 2\,mu\cos\varphi = \int f\,dt$$

Складывая всѣ подобныя уравненія, относящіяся къ совокупности ударовъ, произведенныхъ во время Θ о плоскость MN, получимъ уравненіе:

$$\sum 2\,mu\cos\varphi = \sum \int f\,dt = F\Theta$$

гдѣ F опять есть среднее противодѣйствіе плоскости всѣмъ молекулямъ. Но мы видѣли, что число ударовъ, произведенныхъ одною и тою же частицею, равно $\frac{\Theta u \cos\varphi}{2a}$. Если ввести это значеніе въ предъидущую сумму, относящуюся ко всѣмъ ударамъ объ MN, въ лѣвую часть ея, то, такъ какъ

$$2\,mu\cos\varphi \times \frac{\Theta u \cos\varphi}{2a} = \frac{mu^2\cos^2\varphi}{a}\Theta$$

[1]) Clausius, Pogg. Ann. Bd. C. S. 355.

получимъ уравненіе:

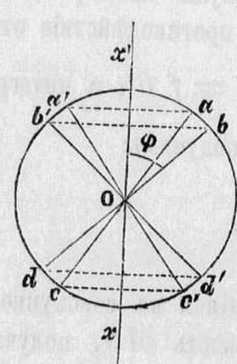
$$\sum \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a}\,\Theta = F\Theta$$

гдѣ знакъ суммы относится теперь только къ различнымъ молекулямъ. Такимъ образомъ получимъ:

$$(3) \qquad F = \sum \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a}$$

Для вычисленія этой суммы Клаузіусъ предполагаетъ, что всѣ молекули имѣютъ одну и туже массу и одинаковую скорость, и что онѣ движутся равномѣрно по всѣмъ направленіямъ. Опишемъ около произвольной точки, какъ центра, шаръ радіусомъ 1 (фиг. 37) и проведемъ радіусы параллельно направленіямъ всѣхъ скоростей; тогда они пересѣкутъ поверхность въ безконечномъ числѣ точекъ, которыя правильно распредѣлятся на поверхности шара. Всѣ скорости, направленія которыхъ образуетъ съ нормалью xx' къ обѣимъ плоскостямъ углы, заключенные между φ и $\varphi + d\varphi$, встрѣчаютъ шаръ въ противоположныхъ поясахъ $aba'b'$ и $cdc'd'$. Онѣ находятся въ круговыхъ конусахъ, вершины которыхъ совпадаютъ съ центромъ шара, а оси—съ xx'. Половины угловъ у вершинъ конусовъ равны φ и $\varphi + d\varphi$. Такъ какъ между обѣими плоскостями находится n частицъ, то полное число означенныхъ точекъ на поверхности также равно n, а отношеніе числа n' частицъ, приходящихся на оба пояса, ко всему числу ихъ n должно быть равно отношенію поверхностей обоихъ поясовъ ко всей поверхности шара. Поэтому

Фиг. 37.



$$\frac{n'}{n} = \frac{2\,.\,2\pi.\sin\varphi\,d\varphi}{4\pi} = \sin\varphi\;d\varphi$$

$$n' = n\sin\varphi\;d\varphi$$

Каждой изъ этихъ n' частицъ соотвѣтствуетъ въ суммѣ (3) членъ

$$\frac{mu^2\;\cos^2\varphi}{a}$$

а n' молекулямъ соотвѣтствуетъ подъ знакомъ суммы выраженіе

$$n'\frac{mu^2\cos^2\varphi}{a} = \frac{mu^2\cos^2\varphi}{a}\,n\;\sin\varphi d\varphi$$

Для полученія дѣйствія всѣхъ молекулей, соотвѣтствующихъ полной поверхности шара, достаточно проинтегрировать это выраженіе въ предѣлахъ 0 и $\frac{\pi}{2}$; тогда уравненіе (3) будетъ:

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{mu^2\cos^2\varphi}{a}\,n\sin\varphi d\varphi = \frac{nmu^2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin\varphi\;d\varphi$$

Но

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\;\sin\varphi d\varphi = \left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

а потому

$$(1) \qquad F = \frac{nmu^2}{3\,a}$$

Если ω означаетъ разсматриваемую площадь каждой изъ двухъ плоскостей, а v — объемъ газа, находящагося между ними, то получимъ:

$$p = \frac{F}{\omega} = \frac{nmu^2}{3\,a\,\omega}$$

Откуда слѣдуетъ, что

$$(2) \qquad pv = \frac{nmu^2}{3}$$

141. При такомъ представленіи мы предположили, что частицы

имѣютъ одинаковыя массы, что, однако, не примѣнимо къ смѣси газовъ, и что всѣ скорости равны — гипотеза, ни чѣмъ еще не подтвержденная. Но представленіе Клаузіуса можно измѣнить такъ, что избавимся отъ этой гипотезы.

Ко всѣмъ случаямъ пригодно уравненіе

$$F = \sum \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a} \tag{3}$$

Для вычисленія суммы членовъ, составляющихъ правую часть, мы введемъ живыя силы молекулей вмѣсто ихъ числа. Живая сила одной частицы есть $\frac{mu^2}{2}$. Сумма $\sum_1 \frac{mu^2}{2}$ живыхъ силъ частицъ, скорости которыхъ соотвѣтствуютъ поясамъ, опредѣляемымъ углами φ и $\varphi + d\varphi$, относится къ суммѣ $\sum \frac{mu^2}{2}$ живыхъ силъ всѣхъ молекулей, которую означимъ V_u, какъ поверхности обоихъ поясовъ къ полной поверхности шара. Такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{\sum_1 \frac{mu^2}{2}}{\sum \frac{mu^2}{2}} = \frac{2 \,.\, 2\pi \sin\varphi d\varphi}{4\pi} = \sin\varphi\, d\varphi$$

или

$$\sum_1 \frac{mu^2}{2} = V_u \times \sin\varphi d\varphi$$

Содержащіяся въ первой суммѣ скорости составляютъ съ нормалью приблизительно одинъ и тотъ же уголъ φ; поэтому, если умножить каждый членъ такой суммы на постоянный множитель $\frac{2}{a}\cos^2\varphi$, то получимъ:

$$\sum_1 \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a} = V_u \times \frac{2}{a}\cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi$$

Это есть та часть F, которая происходитъ отъ молекулей, скоро-

сти которыхъ лежатъ внутри обоихъ разсматриваемыхъ поясовъ. Для полученія полной суммы возьмемъ только интегралъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$; тогда найдемъ:

$$F = \frac{2}{a} V_u \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi$$

или

$$F = \frac{2}{3a} V_u$$

Такимъ образомъ получится общее отношеніе:

$$pv = \frac{2}{3} V_u = \frac{2}{3} \sum \frac{mu^2}{2} \tag{4}$$

Произведеніе изъ объема массы газа на производимое имъ давленіе равно $\frac{2}{3}$ суммы живыхъ силъ поступательнаго движенія всѣхъ частицъ.

При такомъ представленіи мы слѣдили за движеніемъ только одной частицы, не принимая во вниманіе происходящихъ между молекулями ударовъ; но, какъ мы уже замѣтили въ n^0 138, такіе удары между ними не измѣняютъ общаго состоянія системы.

Если m означаетъ массу молекули, а n — число ихъ, то Σm будетъ полная масса, а $\frac{\Sigma m}{n}$ — средняя масса m_1 частицы. Такимъ образомъ можно опредѣлить среднюю скорость, представивъ себѣ однородную газовую массу, состоящую изъ n частицъ, массою m_1, изъ которыхъ каждая имѣетъ одну и туже скорость u_1, съ живою силою, равною суммѣ живыхъ силъ частицъ разсматриваемаго газа. Это ведетъ къ условію, что

$$n\frac{m_1 u_1^2}{2} = \sum \frac{mu^2}{2}$$

которое приводитъ уравненіе (4) къ виду (2):

$$pv = \frac{nm_1 u_1^2}{3}$$

Законъ Маріотта.—Законъ смѣшенія газовъ.

142. Если заставить объемъ газа измѣняться безъ произведенія внѣшней работы, то, по опытамъ Джуля, температура его не измѣнится. Далѣе, живая сила также остается постоянною; отсюда заключаемъ, что температура газа зависитъ единственно отъ его живой силы. Уравненіе (4) показываетъ, что если живая сила газа остается постоянною, т. е. если его температура не измѣняется, то произведенное имъ давленіе находится въ обратномъ отношеніи съ занимаемымъ имъ объемомъ. Это и есть законъ Маріотта.

Законъ смѣшенія газовъ вытекаетъ изъ того же самаго уравненія. Разсмотримъ теперь два различныхъ газа и назовемъ чрезъ $\sum \frac{m'u'^2}{2}$ и $\sum \frac{m''u''^2}{2}$ живыя силы поступательнаго движенія частицъ въ этихъ обоихъ газахъ, и допустимъ, что они смѣшиваются, какъ въ опытахъ Джуля,—безъ внѣшней работы. Если они не производятъ другъ на друга химическаго дѣйствія, то живая сила смѣси должна быть равна суммѣ живыхъ силъ каждаго изъ газовъ, составляющихъ эту смѣсь, а потому

$$\sum \frac{mu^2}{2} = \sum \frac{m'u'^2}{2} + \sum \frac{m''u''^2}{2}$$

Если бы первый газъ одинъ занялъ весь объемъ v смѣси, то онъ произвелъ бы давленіе p', опредѣляемое уравненіемъ:

$$p'v = \frac{2}{3} \sum \frac{m'u'^2}{2}$$

Такимъ же образомъ, если бы второй газъ одинъ занялъ весь объемъ, то онъ произвелъ бы давленіе p'', которое получилось бы изъ уравненія

$$p''v = \frac{2}{3} \sum \frac{m''u''^2}{2}$$

Но если p означаетъ давленіе, производимое газовою смѣсью, то

$$pv = \frac{2}{3} \sum \frac{mu^2}{2}$$

и, слѣдовательно, отсюда получится отношеніе:

$$pv = p'v + p''v$$

или

$$p = p' + p'' \qquad (5)$$

Давленіе газовой смѣси равно суммѣ давленій, которыя произвели бы смѣшанные между собою газы, если бы каждый изъ нихъ отдѣльно занималъ объемъ смѣси.

143. Уравненіе (4) приводитъ еще къ другому важному слѣдствію. Если сопоставить его съ уравненіемъ

$$pv = \alpha p_0 v_0 T \qquad (6)$$

вытекающимъ изъ законовъ Маріотта и Гей-Люссака, то получимъ отношеніе:

$$\sum \frac{mu^2}{2} = \frac{3}{2} \alpha p_0 v_0 T \qquad (7)$$

показывающее, что живая сила поступательнаго движенія частицъ газа пропорціональна абсолютной температурѣ *).

---

*) На основаніи только что высказаннаго, легко вывести извѣстный законъ Авогадро. И въ самомъ дѣлѣ, принимая для двухъ различныхъ газовъ приведенныя здѣсь обозначенія, найдемъ: $\frac{n'}{n''} = \frac{p'v''T''}{p''v'T'}$. Отсюда уже

Уравненіе (7) можно привести также къ виду:

$$(8)\qquad \frac{\sum \frac{mu^2}{2}}{v_0} = \frac{3}{2}\,\alpha p_0 T$$

откуда слѣдуетъ, что отношеніе живой силы единицы вѣса къ удѣльному объему равно абсолютной температурѣ, умноженной на нѣкоторый коэффиціентъ, одинаковый для всѣхъ газовъ.

144. Клаузіусъ пробовалъ вычислять скорость поступательнаго движенія.—Если u_1 означаетъ среднюю скорость молекулей, какъ мы опредѣлили ее въ $n^0$141, то, вслѣдствіе уравненія (6), получимъ:

$$\frac{nm_1 u_1^{\,2}}{3} = \alpha p_0 v_0 T$$

Разсматривая же смѣсь газовъ, вѣсящую одинъ килограммъ, получимъ:

$$nm_1 = \sum m = \frac{1}{g}$$

а предъидущее уравненіе дастъ:

$$(9)\qquad u_1 = \sqrt{3g\alpha p_0 v_0 T}$$

При этомъ постоянныя α, p_0, g имѣютъ слѣдующія величины:

$$\alpha = \frac{1}{273},\ p_0 = 10.333,\ g = 9{,}8096$$

а для атмосфернаго воздуха v_0=0,7733. Если ρ означаетъ плотность газа относительно воздуха, то для этого газа получимъ:

$$v_0 = \frac{0{,}7733}{\rho}$$

Поэтому уравненіе (9) будетъ:

$$(10)\qquad u_1 = 485\sqrt{\frac{T}{273\rho}}$$

ясно, что равные объемы газовъ, при одной и той же температурѣ и при томъ же давленіи, содержатъ одинаковое число частицъ. *Примѣч. перев.*

Для температуры 0 градусовъ $T = 273$, и въ такомъ случаѣ эта формула перейдетъ въ

$$u_1 = 485\sqrt{\frac{1}{\rho}}$$

Принимая эту послѣднюю, Клаузіусъ нашелъ слѣдующіе результаты:

Воздухъ . . $u_1 = 485$

Кислородъ. . $u_1 = 461$

Азотъ. . . . . $u_1 = 492$

Водородъ . . . $u_1 = 1848$ *)

Дѣйствительная энергія газа.

145. До сихъ поръ мы въ нашихъ изслѣдованіяхъ брали только простые газы, т. е. такіе, у которыхъ молекули не имѣютъ размѣровъ, или, какъ говорятъ въ механикѣ, состоящіе изъ матеріальныхъ точекъ, образующихъ центры притяженія и отталкиванія. Но дѣйствительные газы, даже такіе, которые въ химіи называются простыми, представляются состоящими изъ частицъ, изъ которыхъ каждая, въ свою очередь, составляется изъ нѣсколькихъ атомовъ. Въ этомъ случаѣ молекули обладаютъ не только поступательнымъ движеніемъ, но еще и другими движеніями: онѣ вращаются вокругъ самихъ себя, а атомы, изъ которыхъ онѣ состоятъ, совершаютъ колебанія внутри частицы. Эти три движенія должны существовать единовременно. Если мы теперь выйдемъ изъ предположенія, что въ извѣстный моментъ каждая частичка обладаетъ только поступательнымъ движеніемъ, то взаимные удары молекулей очень скоро вызовутъ вращеніе ихъ вокругъ самихъ себя и приведутъ въ движеніе атомы въ каждой частицѣ: тогда часть живой силы поступательнаго движенія перейдетъ въ другія движенія, но

*) Элементарный выводъ формулы для опредѣленія молекулярныхъ скоростей читатель найдетъ въ основаніяхъ термохиміи Наумана, переводъ Лисенко, стр. 43 и проч. *Примѣч. перев.*

полная живая сила останется та же самая. Наоборотъ, если молекули, кромѣ очень медленнаго поступательнаго движенія, обладаютъ еще и весьма быстрымъ вращеніемъ или внутренними колебаніями, то ясно, что послѣднія произвели бы во время удара такое дѣйствіе, что увеличилась бы скорость поступательнаго движенія *). Отсюда выходитъ, что при всякомъ состояніи газа живая сила поступательнаго движенія V_u частицъ находится въ опредѣленномъ отношеніи къ полной живой силѣ V.

Давленіе производится однимъ только поступательнымъ движеніемъ, и мы уже нашли отношеніе (n^0141):

$$(4) \qquad pv = \frac{2}{3} V_u$$

существующее между давленіемъ и живою силою поступательнаго движенія. Въ опытахъ Джуля, при которыхъ объемъ газа измѣняется безъ внѣшней работы, очевидно, не измѣняется и внутренняя энергія $U = V + W$; если же внутренняя работа въ газахъ, какъ мы предполагаемъ, дѣйствительно незамѣтна, то полная живая сила или дѣйствительная энергія V должна быть постоянною. Но, съ теоретической стороны, не извѣстно, остается ли также постоянною во время измѣненія объема и та часть V_u энергіи, которая происходитъ отъ поступательнаго движенія частицъ, потому что вращенія или колебанія могутъ увеличиваться или уменьшаться. Если же разсматриваемый газъ слѣдуетъ закону Маріотта, по которому произведеніе pv не измѣняетъ своей величины, то и часть V_u внутренней энергіи также должна оставаться постоянною.

Смѣшеніе газовъ ведетъ къ тому же слѣдствію. Если смѣшеніе происходитъ безъ внѣшней работы и, кромѣ того, если можно пренебречь внутреннею работою, то полная живая сила смѣси равна суммѣ всѣхъ живыхъ силъ каждаго газа, изъ которыхъ состоитъ

---

*) Болѣе подробное разсужденіе объ этомъ читатель найдетъ въ «Единствѣ физическихъ силъ» А. Секки, пер. Ф. Павленкова, Вятка, 1873 года, стр. 30, а также и въ приведенной здѣсь ссылкѣ на Пуансо: Questions dynamiques sur la percussion des corps. *Примѣч. перев.*

эта смѣсь. Для сохраненія закона давленій необходимо, чтобы это же отношеніе было пригодно и для живыхъ силъ, относящихся къ поступательнымъ движеніямъ; слѣдовательно живая сила вращеній и колебаній не можетъ измѣниться.

146. Какъ мы уже сказали, поступательнаго движенія частицъ газа достаточно для объясненія давленій; но при калориметрическихъ изслѣдованіяхъ нужно принимать во вниманіе всѣ движенія, или полную живую силу V. Мы уже нашли отношеніе ($n^0 45$): $c = A\dfrac{dU}{dt}$. Если теперь $dW = 0$, то это уравненіе будетъ

$$c = A\frac{dV}{dt}$$

или

$$(11) \qquad \frac{dV}{dT} = Ec$$

Такъ какъ теплоемкость c не зависитъ отъ температуры ($n^0 49$), то отсюда получится:

$$V = V_0 + EcT$$

Будетъ естественно, если мы примемъ, что при нулѣ абсолютной температуры полная живая сила V_0, а также и живая сила поступательнаго движенія ($n^0 143$) равны нулю; тогда получимъ:

$$(12) \qquad V = EcT$$

Съ теоретической стороны это уравненіе можно было бы приложить къ опредѣленію абсолютной температуры.

Вслѣдствіе отношенія $C - c = A\alpha p_0 v_0$ въ $n^0 46$ уравненіе (7) въ $n^0 143$ будетъ:

$$(13) \qquad V_u = \frac{3}{2} E(C - c)T$$

Изъ обоихъ послѣднихъ уравненій слѣдуетъ, что

$$(14) \qquad \frac{V_u}{V} = \frac{3}{2}\left(\frac{C}{c} - 1\right)$$

У простыхъ и сложныхъ газовъ (когда въ этихъ послѣднихъ, при ихъ образованіи, не происходитъ сгущенія), подчиняющихся закону Маріотта, отношеніе $\frac{C}{c}$ теплоемкостей имѣетъ приблизительно одну и ту же величину 1,410; отсюда выходитъ, что и отношеніе $\frac{V_u}{V}$ имѣетъ также постоянную величину 0,615.

И такъ, во всѣхъ газахъ, о которыхъ мы только что говорили, существуетъ значительная часть полной энергіи (около четырехъ десятыхъ), которая не относится къ поступательному движенію частицъ. Отсюда можно заключить, что газы, называемые простыми, какъ водородъ, кислородъ, азотъ и т. д., въ дѣйствительности не заслуживаютъ такого названія.

У газовъ, не слѣдующихъ закону Маріотта, и у сложныхъ газовъ, при образованіи которыхъ произошло сгущеніе, $\frac{V_u}{V}$ имѣетъ меньшее значеніе и тѣмъ менѣе, чѣмъ сложнѣе газовыя частицы. Въ этомъ случаѣ вращеніе молекулей и колебанія атомовъ въ каждой частицѣ составляютъ большую часть полной энергіи газа.

Изъ этихъ разсужденій выходитъ, что существуютъ двѣ главныя причины, по которымъ дѣйствительные газы не строго подчиняются идеальнымъ законамъ совершенныхъ: 1) внутренняя работа, сопровождающая измѣненіе объема; 2) составъ молекулей и расходъ нѣкоторой перемѣнной части энергіи на вращеніе или на внутреннія колебанія частицъ.

Превращеніе внѣшней работы въ тепловую энергію и обратно.

147. Какимъ образомъ внѣшняя работа превращается въ газѣ въ тепловую энергію и обратно—объ этомъ можно составить себѣ представленіе слѣдующимъ образомъ.

Разсмотримъ извѣстную массу газа, находящагося въ кубѣ, ребро котораго равно a. Одну изъ граней этого куба MN (фиг. 38) образуетъ подвижный поршень, на который дѣйствуетъ сила

$F = \frac{nmu^2}{3a}$, равная давленію газа. Далѣе, положимъ, что поршень движется во внутрь съ весьма малою скоростью v, сравнительно съ u; тогда израсходованная работа въ очень малое время θ будетъ равна $Fv\theta$. Для вычисленія приращенія энергіи, которое при этомъ сообщается газу, мы, для простоты, возьмемъ въ основаніе нашего разсужденія представленіе Кренига. Предположимъ, что молекули раздѣлены на три группы, движущіяся параллельно ребрамъ куба. Въ явленіи ничего не можетъ измѣниться, если мы сообщимъ всей системѣ, т. е. газу вмѣстѣ съ содержащимъ его сосудомъ, скорость, общую по величинѣ, но противоположную движенію поршня. Въ то время какъ поршень остается въ покоѣ, частицы достигаютъ его при ударѣ съ относительною скоростью $-(u+v)$, а отражаются отъ него съ относительною скоростью $+(u+v)$. Такъ какъ вся система движется съ общею скоростью $-v$, то абсолютная скорость послѣ удара будетъ $u+2v$, а приращеніе живой силы послѣ же удара $\frac{m(u+2v)^2}{2} - \frac{mu^2}{2}$ или приблизительно $2muv$. Такъ какъ число ударовъ каждой молекули во время θ приблизительно равно $\frac{u\theta}{2a}$, то приращеніе живой силы для каждой частицы втеченіе этого времени будетъ $\frac{mu^2v\theta}{a}$, а для $\frac{n}{3}$ молекулей $\frac{nmu^2v\theta}{3a}$. Эта величина равна израсходованной работѣ.

Фиг. 38.

Наоборотъ, если поршень удаляется, то происходитъ уменьшеніе живой силы во время удара, а часть энергіи газа превращается во внѣшнюю работу.

Твердое и жидкое состоянія.

148. Вѣроятно, что молекули твердыхъ тѣлъ состоятъ изъ весьма большаго числа атомовъ, такъ что размѣры частицъ не очень малы въ сравненіи съ ихъ разстояніями, и что дѣйствіе двухъ со-

сѣднихъ молекулей происходитъ не только отъ двухъ равныхъ и противоположныхъ силъ, имѣющихъ своими точками приложенія центръ тяжести обѣихъ частицъ, но еще и отъ двухъ паръ силъ, которыя служатъ для направленія молекулей и для приданія имъ особаго положенія, характеризующаго твердое состояніе. Молекули твердаго тѣла колеблются около своихъ положеній равновѣсія, не слишкомъ удаляясь отъ нихъ; кромѣ этихъ колебаній, совершаемыхъ центромъ тяжести частицы, могутъ быть еще: вращеніе ихъ около своего центра тяжести, а также и колебанія атомовъ внутри частицы, изъ которыхъ она состоитъ.

Жидкое состояніе представляетъ, кажется, середину между твердымъ и газообразнымъ состояніями. При этомъ молекули не имѣютъ опредѣленныхъ положеній равновѣсія, какъ у твердыхъ тѣлъ, и, съ другой стороны, не удаляются другъ отъ друга такъ далеко, чтобы частичныя силы, какъ у газовъ, сдѣлались незамѣтными. Если предположимъ, что вращеніе молекули вокругъ своего центра тяжести становится все болѣе и болѣе быстрымъ и переходитъ въ продолжительное вращеніе, то при этомъ, по большей части, исчезаетъ вліяніе вида частицы, что̀ дѣйствительно и бываетъ при жидкостяхъ. Если бы это было такъ, то такъ называемая скрытая теплота плавленія заключалась бы, главнымъ образомъ, въ энергіи вращательнаго движенія молекулей. Съ другой стороны, скорость поступательнаго движенія частицъ не имѣетъ такой большой величины, чтобы молекули какимъ нибудь образомъ отдѣлились другъ отъ друга, потому что частичныя силы все еще имѣютъ замѣтное вліяніе; движеніе же частицы не прямолинейно и не равномѣрно. Молекуля, находящаяся по сосѣдству съ группою частицъ, можетъ отъ нея удаляться и, будучи притянута второю группою, приметъ относительно ея положеніе, сходное съ предъидущимъ.

Испареніе.

149. Клаузіусъ пытался объяснить испареніе слѣдующимъ образомъ [1]). Вѣроятно, скорости поступательныхъ движеній частицъ

[1]) Clausius, Pogg. Ann. Bd. C. S. 353, или Abhandlungen über die

въ одной и той же жидкости весьма различны. Молекуля, движущаяся къ свободной поверхности жидкости, при благопріятныхъ условіяхъ, можетъ выйдти изъ сферы притяженія сосѣднихъ частицъ и достигнуть по прямой линіи того пространства, которое лежитъ надъ жидкостью. Предположимъ сначала, что это пространство, ограниченное стѣнками, пустое; тогда попавшія туда молекули наполнятъ его и образуютъ паръ, представляющій собою газъ. Частицы ударяются о стѣнки, сталкиваются и снова попадаютъ на поверхность; нѣкоторыя изъ нихъ отражаются, другія же проникаютъ въ промежутки и возвращаются внутрь. За тѣмъ устанавливается равновѣсіе, при которомъ число частицъ снова возвращающихся будетъ равно числу молекулей выходящихъ. Наибольшая плотность пара зависитъ отъ средней скорости частицъ и, слѣдовательно, отъ температуры.

Если жидкость испаряется, то ясно, что выходятъ въ большемъ числѣ тѣ молекули, которыя обладаютъ наибольшею скоростью; поэтому средняя живая сила остающихся частицъ будетъ меньше, и, слѣдовательно, температура жидкости понизится. Чтобы удержать ее при первоначальной температурѣ, необходимо сообщить ей нѣкоторое количество теплоты, а въ этомъ и заключается то, что̀ называется скрытою теплотою испаренія.

Если въ пространствѣ надъ жидкостью находится газъ, то онъ не препятствуетъ испаренію, но дѣйствуетъ только такъ, что испареніе замедляется. Если выходящая съ поверхности частица встрѣчается съ сосѣднею молекулею газа, то она можетъ вернуться назадъ и снова проникнуть въ жидкость. Очевидно, что при этомъ въ единицу времени образуется меньшее число частицъ пара, чѣмъ въ пространствѣ, ненаполненномъ газомъ. Но тоже самое имѣетъ мѣсто и при обратномъ ходѣ, — отъ пара къ жидкости: происходящіе отъ присутствія газа удары мѣшаютъ извѣстному числу молекулей возвратиться въ жидкость. Такъ какъ вѣроятность для удара при входѣ и выходѣ частицъ одна и таже, то обмѣнъ, происходящій

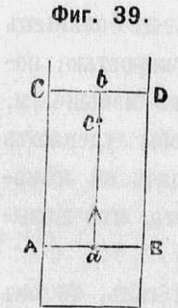
mechanische Wärmetheorie von Clausius. Braunschweig, 1867. Zweite Abthl.

между жидкостью и паромъ, при этихъ обстоятельствахъ, будетъ меньше, а равновѣсіе наступитъ при такой плотности пара, какъ еслибы жидкость находилась въ совершенно свободномъ отъ газа пространствѣ; но все-таки равновѣсіе будетъ устанавливаться медленнѣе.

Парообразованіе въ неограниченномъ пространствѣ.

150. Разсмотримъ весьма большой длины трубку $ABCD$ (фиг. 39), свободную отъ газа, а внизу содержащую жидкость. Если частица удаляется изъ жидкости вертикально со скоростью u, то эта послѣдняя отъ дѣйствія тяжести будетъ постепенно уменьшаться, и молекуля поднимется на высоту $h=\frac{u^2}{2g}$, а затѣмъ упадетъ обратно.

Фиг. 39.



Если она при своемъ паденіи встрѣтится въ c съ другую частицею, которая слѣдовала за нею при восхожденіи, то первая, такъ какъ ихъ скорости равны, отскочитъ снизу вверхъ съ тою же самою скоростью и, значитъ, въ b снова достигнетъ той же самой высоты h. Такимъ образомъ паръ не перейдетъ за извѣстный уровень CD, и надъ жидкостью должна образоваться атмосфера съ убывающею плотностью.

151. Эти разсужденія могутъ быть примѣнены также къ газамъ, и ими очень хорошо объясняется предѣлъ атмосферы. Если означимъ чрезъ u скорость воздушныхъ частицъ на поверхности земли, то самая большая высота, до которой онѣ могутъ подняться, опредѣлится изъ формулы:

$$h=\frac{u^2}{2g}$$

разсматривая силу тяжести постоянною. Вставивъ вмѣсто u его значеніе изъ уравненія (9) (n^0 144), получимъ:

$$h=\frac{3}{2}\alpha\, p_0\, v_0\, T \qquad (16)$$

Если нижній слой имѣетъ температуру тающаго льда, то найдемъ, что

$$h=\frac{3}{2}p_0\, v_0=12000 \text{ метр.}$$

Различныя явленія показываютъ намъ, что эта высота слишкомъ мала. Но, въ вычисленіи мы предположили также, что газовая частица, поднимающаяся съ поверхности земли, не пріобрѣтаетъ на своемъ пути внѣшней энергіи; между тѣмъ какъ въ дѣйствительности солнечные лучи постоянно сообщаютъ газу тепловую энергію; вслѣдствіе чего верхній предѣлъ атмосферы долженъ быть выше, и вычисленіе показываетъ, что онъ существуетъ.

Распространеніе колебаній въ газахъ.

152. Мы приняли, что путь газовой частицы составляется только прямолинейными отрѣзками, соединенными между собою кривыми, которыя обязаны своимъ происхожденіемъ дѣйствію молекулей при взаимной ихъ встрѣчѣ. Эти кривыя, сравнительно съ прямыми, очень малы, но и самыя прямыя, съ своей стороны, также весьма малы, не смотря на очень большую скорость поступательнаго движенія частицъ, потому что взаимныя столкновенія ихъ весьма многочисленны. Вообще говоря, изъ неправильныхъ колебаній устанавливается сложное состояніе, при чемъ каждая частица движется на весьма небольшомъ протяженіи по зигзагу. Сложное состояніе есть такое, какъ еслибы молекули, будучи неподвижны, дѣйствовали другъ на друга отталкивательными силами, которыя суть извѣстныя функціи разстоянія и температуры. Это продолжительное отталкиваніе между частицами, разсматривая ихъ неподвижными, замѣняетъ состояніе, происходящее въ дѣйствительности отъ послѣдовательныхъ ударовъ.

Такимъ образомъ придемъ къ закону Маріотта, предполагая, что воображаемыя отталкивательныя силы обратно пропорціональны разстояніямъ и берутся съ нѣкоторымъ коеффиціентомъ, зависящимъ отъ температуры газа.

Положимъ, что молекули правильно распредѣлены по тремъ

взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, и пусть a будетъ ребро элементарнаго куба, углы котораго образуются восемью лежащими другъ возлѣ друга частицами; тогда равнодѣйствующая всѣхъ отталкивательныхъ силъ молекулей, лежащихъ по лѣвую сторону плоскости AB (фиг. 40) и дѣйствующихъ на молекулю m, находящуюся на AB, будетъ перпендикулярна къ этой плоскости и можетъ быть выражена посредствомъ

Фиг. 40.

A

m

B

$$F = \frac{km^2}{a}$$

Коеффиціентъ k есть функція температуры и не зависитъ отъ разстоянія a между частицами. Если разстояніе a удвоится, то при этомъ удвоются и всѣ разстоянія, а частичныя силы уменьшатся на половину, точно также какъ и ихъ равнодѣйствующая: отсюда выходитъ, что эта послѣдняя должна быть обратно пропорціональна a. Такъ какъ на квадратномъ метрѣ находится $\frac{1}{a^2}$ частицъ, то, слѣдовательно, производимое на эту площадь давленіе будетъ

$$p = F \times \frac{1}{a^2} = \frac{km^2}{a^3}$$

а потому

$$pa^3 = km^2$$

Разсмотримъ массу газа, вѣсъ которой составляетъ одинъ килограммъ и которая заключена въ кубѣ съ ребромъ b; тогда число молекулей $n = \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{v}{a^3}$. Далѣе, мы имѣемъ: $nmg = 1$, а потому предъидущее отношеніе будетъ:

$$pv = \frac{km}{g}$$

а это и есть законъ Маріотта.—Для нахожденія закона Гей-Люссака

нужно предположить, что коеффиціентъ k пропорціоналенъ абсолютной температурѣ T.

Еще Лапласъ показалъ, что допущеніе частичныхъ отталкивательныхъ силъ, обратно пропорціональныхъ разстояніямъ, достаточно для вывода закона Маріотта.

153. Предположеніе идеальной среды, состоящей изъ неподвижныхъ, находящихся въ положеніи равновѣсія частицъ, дѣйствующихъ другъ на друга силами, которыя суть функціи разстояній, составляетъ основаніе теоріи волненія. Вычисленіе показываетъ, что если въ такой средѣ существуетъ центръ колебаній, то они располагаются тѣмъ въ большемъ порядкѣ, чѣмъ болѣе удалены отъ этого центра. Если среда изотропная, то колебанія разлагаются на продольныя и поперечныя, распространяющіяся съ различными скоростями, такъ что оба рода волнъ отдѣляются одинъ отъ другаго. Далѣе выходитъ, что если частичныя силы обратно пропорціональны разстояніямъ молекулей, то поперечныя колебанія не могутъ распространяться; отсюда слѣдуетъ, что въ воздухѣ бываютъ только продольныя колебанія. Напротивъ того, частичныя силы въ эфирѣ должны слѣдовать другому закону, потому что эта среда распространяетъ только поперечныя волны, составляющія причину свѣтовыхъ явленій. Такимъ образомъ, новая теорія не уничтожаетъ прежнія работы надъ распространеніемъ звука, а даетъ только другой смыслъ элементарнымъ законамъ, которые служили точкою исхода этихъ вычисленій.

Законы соединеній газовъ.

154. Было наблюдено, что два простыхъ газа соединяются между собою въ простыхъ объемныхъ отношеніяхъ, и что если соединеніе ихъ газообразное, то существуетъ также простое отношеніе между объемомъ полученнаго газа и составными его частями. На этомъ основывается положеніе, что равные объемы простыхъ газовъ, при одной и той же температурѣ и при томъ же самомъ давленіи, состоятъ изъ одинако-

ваго числа частицъ. Разсмотримъ слѣдствія, выходящія изъ такого положенія.

Если будемъ разсматривать два различныхъ газа, занимающихъ при одной и той же температурѣ и при томъ же самомъ давленіи одинаковый объемъ v, то для перваго изъ нихъ имѣемъ:

$$pv = \frac{nmu^2}{3}$$

а для втораго —

$$pv = \frac{n'm'u'^2}{3}$$

И такъ, если по нашему положенію $n = n'$, то отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{m'u'^2}{2}$$

Откуда заключаемъ, что если два простыхъ газа имѣютъ одну и туже температуру, то живая сила поступательнаго движенія частицъ въ обоихъ газахъ одинакова. И такъ, можно сказать, что два газа тогда имѣютъ одну и туже температуру, когда ихъ молекули обладаютъ одинаковою живою силою поступательнаго движенія. Кромѣ того, такъ какъ эта живая сила пропорціональна абсолютной температурѣ, то можно положить, что

$$\frac{mu^2}{2} = \lambda T$$

гдѣ λ означаетъ постоянную величину.

Мы видѣли (n^0 146), что у простыхъ газовъ живая сила поступательнаго движенія составляетъ постоянную дробь полной живой силы; слѣдовательно, если два простыхъ газа имѣютъ одну и туже температуру, то полная живая сила частицы каждаго изъ нихъ одинакова и также пропорціональна абсолютной температурѣ.

155. Разсмотримъ теперь сложные газы, и для примѣра возьмемъ два окисла азота, составъ которыхъ слѣдующій:

1 объемъ кислорода + 1 объемъ азота
даютъ два объема окиси азота.
1 объемъ кислорода + 2 объема азота
даютъ 2 объема закиси азота.

Принимаютъ, что частица окиси азота состоитъ изъ одной частицы кислорода и одной азота, а молекуля закиси азота — изъ одной частицы кислорода и двухъ азота. Если теперь n означаетъ число частицъ въ единицѣ объема каждаго простаго газа, то вышесказанныя соединенія изобразятся формулами:

окись азота. . . . . . . $nO + nN = n(NO)$
закись азота . . . . . . $nO + 2nN = n(N_2O)$

При одной и той же температурѣ и при томъ же самомъ давленіи два равные объема сложныхъ газовъ содержатъ одно и тоже число частицъ, а слѣдовательно и живая сила поступательнаго движенія частицы каждаго изъ нихъ одна и таже.

Но этотъ законъ не согласуется уже съ закономъ простыхъ газовъ, потому что если въ одномъ объемѣ кислорода заключается n частицъ, то эти n молекулей должны были бы находиться въ двухъ объемахъ окиси азота, а слѣдовательно въ одномъ $\frac{n}{2}$; живая же сила частицы окиси азота была бы вдвое болѣе живой силы частицы кислорода.

Для обобщенія закона простыхъ газовъ, Клаузіусъ предполагаетъ, что въ простыхъ тѣлахъ каждая частица состоитъ изъ соединенія двухъ одинаково сильно наэлектризованныхъ частицъ, но одна изъ нихъ положительно, а другая отрицательно, и что соединеніе двухъ газовъ происходитъ отъ двойнаго разложенія. Если означить $\hat{O}\dot{O}$

молекулю кислорода, а $\dot{N}\dot{N}$—молекулю азота, то обѣ реакціи можно представить слѣдующимъ образомъ:

Окись азота . . . . . $n(\dot{O}\dot{O}) + n(\dot{N}\dot{N}) = 2n(\dot{O}\dot{N})$

Закись азота . . . . $n(\dot{O}\dot{O}) + 2n(\dot{N}\dot{N}) = 2n(\dot{O}\ddot{N})$

Такимъ образомъ единица объема сложнаго газа также содержитъ n частицъ.

Разсмотримъ другой примѣръ.

Хлористоводородная кислота имѣетъ совершенно сходное значеніе съ окисью азота: одинъ объемъ хлора и одинъ объемъ водорода даютъ два объема хлористоводородной кислоты:

$$n(\dot{Cl}\dot{Cl}) + n(\dot{H}\dot{H}) = 2n(\dot{Cl}\dot{H})$$

слѣдовательно одинъ объемъ соединенія содержитъ n частицъ.

Вода представляетъ аналогію съ закисью азота: одинъ объемъ кислорода и два объема водорода даютъ два объема водяного пара:

$$n(\dot{O}\dot{O}) + 2n(\dot{H}\dot{H}) = 2n(\dot{O}\ddot{H})$$

Сѣрнистый ангидритъ представляетъ сходство какъ съ закисью азота, такъ и съ водой, что найдено при опредѣленіи плотности паровъ сѣры Сенъ-Клеръ Девиллемъ и Тростомъ. Одинъ объемъ паровъ сѣры и два объема водорода образуютъ два объема сѣрнистаго водорода:

$$n(\dot{S}\dot{S}) + 2n(\dot{H}\dot{H}) = 2n(\dot{S}\ddot{H})$$

Одинъ объемъ азота и три объема водорода даютъ два объема амміака:

$$n(\dot{N}\dot{N}) + 3n(\dot{H}\dot{H}) = 2n(\dot{N}\dddot{H})$$

Но гипотеза Клаузіуса недостаточна для объясненія сложныхъ соединеній. Два объема хлористоводородной кислоты и два объема

амміака образуютъ четыре объема хлористаго аммонія. Предъидущія формулы дали бы:

$$2n(\dot{Cl}\dot{H}) + 2n(\dot{N}\dddot{H}) = 2n(\dot{Cl}\dddot{N}\dot{H})$$

т. е. два объема соединенія вмѣсто четырехъ.—Для установленія аналогіи нужно принять, что молекули простыхъ газовъ состоятъ изъ четырехъ атомовъ; при этомъ формулы для хлористоводородной кислоты и амміака были бы слѣдующія:

$$n(\ddot{Cl}\ddot{Cl}) + n(\ddot{H}\ddot{H}) = 2n(\ddot{Cl}\ddot{H})$$

$$n(\ddot{N}\ddot{N}) + 3n(\ddot{H}\ddot{H}) = 2n(\ddot{N}H_6)$$

а для образованія хлористаго аммонія имѣли бы:

$$2n(\ddot{Cl}\ddot{H}) + 2n(\ddot{N}H_6) = 4n(\dot{Cl}\dot{N}H_4)$$

Сульфгидратъ представляетъ такое же затрудненіе.

Такимъ образомъ этотъ законъ можно было бы обобщить и сказать, что равные объемы всѣхъ газовъ при одной и той же температурѣ и при томъ же самомъ давленіи содержатъ одинаковое число частицъ.

Отсюда можно было бы заключить, что живая сила поступательнаго движенія частицы при той же самой температурѣ у всѣхъ газовъ одна и таже и пропорціональна абсолютной температурѣ. При этомъ мы имѣли бы, что $\frac{mu^2}{2} = \lambda T$, гдѣ λ — одна и таже постоянная для всѣхъ газовъ.

Напротивъ того, полная живая сила молекули не была бы одинакова у всѣхъ газовъ, потому что отношеніе живой силы поступательнаго движенія къ полной живой силѣ не одно и тоже для всѣхъ сложныхъ газовъ. Полная живая сила частицы при одной и той же температурѣ будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ она сложнѣе.

Законъ Дюлонга и Пти.

156. Дюлонгъ и Пти нашли, что для большей части простыхъ тѣлъ, будутъ ли они твердыя или жидкія, теплоемкость обратно пропорціональна химическимъ паямъ, или что произведеніе изъ теплоемкости тѣла и его химическаго пая есть постоянное число. Объ этомъ можно вывести заключеніе изъ слѣдующихъ чиселъ:

	C.	Пай.	C × пай.
Желѣзо	0,1138	28	3,1864
Цинкъ	0,0755	32,75	3,1276
Кадмій	0,0567	56	3,1752
Свинецъ	0,0316	103,75	3,2599

Если предположить, что вѣсъ частицы тѣла пропорціоналенъ его химическому паю, то изъ этого закона слѣдуетъ, что теплоемкость частицы для всѣхъ простыхъ тѣлъ одна и таже *). Но есть нѣкоторые металлы, которые кажутся неподходящими подъ этотъ законъ. Сюда, напримѣръ, относятся серебро и калій:

	C.	Пай.	C × пай.
Серебро	0,0570	108	6,156
Калій	0,1696	39	6,574

Легко видѣть, что стоитъ только принять за паи этихъ металловъ половины ихъ обыковенныхъ химическихъ паевъ, чтобы они удовлетворяли общему правилу; при чемъ окислы ихъ имѣли бы одну изъ

*) Законъ Дюлонга и Пти вообще можетъ быть выраженъ формулою: $Pc = P'c'$ или $\frac{c}{c'} = \frac{P'}{P}$. При равныхъ же массахъ ($Pn = m$ и $P'n' = m$) найдемъ: $\frac{P'}{P} = \frac{n}{n'}$ и, слѣдовательно, $\frac{c}{c'} = \frac{n}{n'}$. Полагая же $n = n'$, увидимъ, что и $c = c'$.

Примѣч. переводч.

двухъ формулъ: OZn, OK_2, смотря потому, принадлежатъ ли они къ одному или къ другому классу. Кромѣ того, есть основанія въ химіи и въ кристаллографіи, въ силу которыхъ паи слѣдуетъ брать такъ, какъ они выходятъ только изъ ихъ теплоемкостей.

И такъ, если прилично выбрать химическіе паи, выражая ихъ въ паѣ водорода, принятаго за единицу, то произведеніе изъ теплоемкости простаго тѣла и его пая будетъ почти постоянное число, равное 3,2.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Электричество.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Электростатика.

Законъ Кулона.—Опредѣленіе потенціала.—Потенціалъ однороднаго шароваго слоя.—Случай, когда притягиваемая точка лежитъ внутри дѣйствующей массы.—Поверхности уровней.—Главная теорема.—Равновѣсіе электричества въ системѣ совершенныхъ проводниковъ.—Распредѣленіе электричества на шарѣ и на эллипсоидѣ.

Законъ Кулона.

157. Для объясненія закона электрическаго притяженія и отталкиванія приняли двѣ жидкости, которыя представляютъ себѣ непрерывно распространенными во всѣхъ тѣлахъ. Тѣло не наэлектризовано, если каждый элементъ его объема содержитъ одинаковое кокичество обѣихъ жидкостей; напротивъ того, оно наэлектризовано, когда одна изъ жидкостей находится въ избыткѣ. Этотъ избытокъ называется свободнымъ электричествомъ тѣла. Взаимное дѣйствіе двухъ безконечно малыхъ массъ m, m' свободнаго электричества направляется по соединяющей ихъ линіи; оно будетъ отталкивательное или притягательное, смотря по тому, будутъ ли обѣ массы однороднаго или разнороднаго электричества; это дѣй-

ствіе обратно пропорціонально квадратамъ разстояній и, слѣдовательно, можетъ быть выражено формулою:

$$-\frac{mm'}{r^2}$$

разсматривая силу положительною или отрицательною,—если она дѣйствуетъ притягательно или отталкивательно, и принимая за единицу электрической массы такую, которая, дѣйствуя на равную ей по величинѣ, но противоположную по знаку, на единичномъ разстоянiи производитъ единичное притяженіе. Это и есть законъ Кулона, который, какъ увидимъ, заключаетъ въ себѣ всѣ электростатическія явленія.

158. Разсмотримъ безконечно малую электрическую массу m, на которую дѣйствуетъ нѣсколько другихъ такихъ же электрическихъ массъ m', m'',.... Пусть x, y, z будутъ координаты точки m, x', y', z'—координаты m' и т. д. Кромѣ того, пусть a, b, c означаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ прямою mm' съ осями; тогда проэкціи равнодѣйствующей, происшедшей отъ дѣйствія другихъ массъ на массу m, на три оси координатъ будутъ:

$$X=-m\sum\frac{m'a}{r^2},\ Y=-m\sum\frac{m'b}{r^2},\ Z=-m\sum\frac{m'c}{r^2}$$

Предположимъ, что масса m равна единицѣ, и означимъ черезъ dq какую либо изъ массъ m', m''..... свободнаго электричества, находящагося на тѣлѣ или на системѣ тѣлъ; тогда:

$$(1)\qquad X=-\sum\frac{adq}{r^2},\ Y=-\sum\frac{bdq}{r^2},\ Z=-\sum\frac{cdq}{r^2}$$

Эти формулы выражаютъ дѣйствіе, которое производитъ система электрическихъ тѣлъ на единичную массу положительнаго электричества, находящуюся въ какой либо точкѣ P пространства. Очевидно, достаточно обратить вниманіе только на свободное электричество, потому что нейтральная жидкость, состоящая изъ двухъ равныхъ, но противоположныхъ электрическихъ массъ $+dq$ и $-dq$, не можетъ оказать дѣйствія на точку P.

Опредѣленіе потенціала.

159. Предъидущія три суммы можно привести къ одной, а именно:

$$a=\frac{x'-x}{r},\ b=\frac{y'-y}{r},\ c=\frac{z'-z}{r}$$

$$r^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$$

Такъ какъ разстояніе r и косинусы a, b, c суть функціи координатъ x, y, z точки P, то составляющія X, Y, Z силы, дѣйствующей на точку P, должны быть также функціями этихъ трехъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z. Отъ дифференцированія по x найдемъ:

$$r\frac{dr}{dx}=-(x'-x),\qquad \frac{dr}{dx}=-\frac{x'-x}{r}=-a$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}=\frac{a}{r^2}$$

и, слѣдовательно,

$$X=-\sum\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}dq$$

Введемъ теперь интегралъ

$$(2)\qquad V=\sum\frac{dq}{r}$$

распространяющійся на всѣ электрическія тѣла. Эта сумма есть также функція координатъ x, y, z точки P, а потому получимъ:

$$\frac{dV}{dx}=\sum\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}dq=-X$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$(3)\qquad X=-\frac{dV}{dx},\ Y=-\frac{dV}{dy},\ Z=-\frac{dV}{dz}$$

Такимъ образомъ составляющія дѣйствія всѣхъ электрическихъ тѣлъ на единичную массу электричества, мысленно сосредоточенную въ точкѣ P, суть частныя производныя извѣстной функціи координатъ этой точки, взятыя съ противными знаками. Въ своихъ изслѣдованіяхъ надъ притяженіемъ Гаусъ назвалъ эту функцію V потенціаломъ [1]).

Въ предъидущемъ мы предположили, что точка P лежитъ внѣ дѣйствующихъ массъ; при этомъ разстояніе r никогда не будетъ нулемъ и, слѣдовательно, частное $\frac{1}{r}$ — величина конечная, а интегралъ V имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе; слѣдовательно, потенціалъ есть конечная и сплошная функція отъ x, y, z. Тѣмъ же свойствомъ обладаютъ и составляющія X, Y, Z. Но если точка P лежитъ внутри дѣйствующихъ массъ, то функція $\frac{1}{r}$ будетъ безконечная, и опредѣленіе предъидущаго интеграла представляетъ большія затрудненія. Прежде чѣмъ мы будемъ говорить объ этомъ случаѣ, опредѣлимъ потенціалъ однороднаго шароваго слоя.

Потенціалъ однороднаго шароваго слоя.

160. Разсмотримъ однородный слой, ограниченный двумя концентрическими шаровыми поверхностями, радіусы которыхъ a и

[1]) Gauss, Algemeine Lehrzätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs — und Abstossungskräfte. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839. Leipzig, 1840, или Karl Friedrich Gauss Werke. Bd. V. S. 195. Göttingen, 1867. Далѣе о потенціалѣ говорится въ Die Potentialfunction und das Potential, ein Beitrag zur mathematischen Physik von Dr. R Clausius. 2 Aufl. Leipzig, 1866. Приложеніе потенціала къ электростатикѣ и электродинамикѣ обстоятельно сдѣлано въ «Einleitung in die Electrostatik, die Lehre vom Mangnetismus und in die Elektrodinamik“ von August Beer, Braunschweig, 1865.

$a+da$. Пусть ρ будетъ разстояніе OP между центромъ O и точкою P; θ — уголъ, составляемый радіусомъ, проведеннымъ въ какую нибудь точку M слоя, съ прямою OP, и, наконецъ, φ — уголъ, составляемый плоскостью POM съ какою нибудь неподвижною плоскостью, проходящею черезъ OP; тогда элементъ объема выразится посредствомъ

$$dv=a^2\sin\theta\, da d\theta d\varphi \ ^{*)}$$

Если k означаетъ плотность свободнаго электричества, то получимъ:

$$dq=kdv=ka^2\sin\theta\, da\, d\theta\, d\varphi$$

и, слѣдовательно,

$$V=ka^2da\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}d\theta\, d\varphi=2\pi ka^2da\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{r}d\theta$$

Но изъ отношенія

$$r^2=a^2+\rho^2-2a\rho\cos\theta$$

выходитъ, что

$$rdr=a\rho\sin\theta d\theta$$

А если перемѣнную θ выразить въ перемѣнной r, то

$$V=\frac{2\pi kada}{\rho}\int dr$$

При этомъ мы должны различать два случая, смотря потому, будетъ ли точка P находиться внѣ шароваго слоя, или внутри пус-

*) Для вывода этой формулы стоитъ только представить себѣ поверхность шара, на которой элементъ ея, съ одной стороны, будетъ ограниченъ дугою $ad\theta$, а съ другой—дугою $a\sin\theta\, d\varphi$, потому что радіусъ этой дуги, имѣющей центръ на линіи OP, равняется $a\sin\theta$. Принимая эту площадку за прямоугольникъ и умноживъ величину ея на da, получимъ вышенаписанную формулу. *Примѣч. перев.*

таго шара a. Въ первомъ случаѣ предѣлы интегрированія будутъ $\rho - a$ и $\rho + a$, при чемъ

$$\int_{\rho-a}^{\rho+a} dr = 2a, \quad V = \frac{4\pi a^2\, kda}{\rho} = \frac{M}{\rho}$$

гдѣ M означаетъ массу шароваго слоя. И такъ, потенціалъ шароваго слоя относительно внѣшней точки есть такой, какъ если бы масса шаровой оболочки была сосредоточена въ ея центрѣ. Во второмъ случаѣ предѣлы будутъ $a - \rho$ и $a + \rho$, при чемъ

$$\int_{a-\rho}^{a+\rho} dr = 2\rho, \quad V = 4\pi\, kada = \frac{M}{a}$$

Потенціалъ шароваго слоя относительно внутренней точки P постоянный, т. е. не зависитъ отъ ея положенія; отсюда слѣдуетъ, что и сила равна нулю.

Разсмотримъ теперь дѣйствіе однороднаго шара съ радіусомъ a на лежащую внутри его точку P, разстояніе которой отъ центра равно ρ. — При этомъ можно представить себѣ шаръ состоящимъ изъ однихъ только однородныхъ, концентрическихъ шаровыхъ слоевъ. Тѣ шаровыя оболочки, радіусы которыхъ менѣе ρ, дѣйствуютъ на внѣшнюю точку P и имѣютъ потенціаломъ

$$\frac{4\pi\, k}{\rho}\int_0^{\rho} a^2 da = \frac{4\pi\, k\rho^2}{3}$$

Напротивъ того, тѣ, радіусы которыхъ больше ρ, дѣйствуютъ на внутреннюю точку и имѣютъ потенціаломъ

$$4\pi\, k\int_{\rho}^{a} ada = 2\pi k\,(a^2 - \rho^2)$$

Поэтому потенціалъ всего шара будетъ

$$V = 2\pi\, k\left(a^2 - \frac{\rho^2}{3}\right)$$

Если вычислить дѣйствіе этого шара на точку P, то окажется, что шаровыя оболочки, радіусы которыхъ больше ρ, не производятъ на нее никакого дѣйствія, а тѣ, радіусы которыхъ менѣе ρ, дѣйствуютъ такъ, какъ еслибы онѣ были сосредоточены въ центрѣ O. Равнодѣйствующая же есть сила, величина которой

$$\frac{4}{3}\pi k\rho$$

и направлена по OP. Проэкціи ея на оси, проходящія чрезъ точку O, суть:

$$\frac{4}{3}\pi kx, \quad \frac{4}{3}\pi ky, \quad \frac{4}{3}\pi kz$$

Ясно, что онѣ равны частнымъ производнымъ потенціала, но съ обратнымъ знакомъ.

Случай, когда притягиваемая точка лежитъ внутри дѣйствующей массы.

161. Теперь мы должны строго опредѣлить значеніе интеграловъ V, X, Y, Z. Представимъ себѣ, что вокругъ точки P описанъ шаръ радіусомъ 1 и разсмотримъ конусъ, имѣющій вершиною P, а основаніемъ элементъ $d\omega$ шаровой поверхности. Далѣе, вообразимъ два шара съ радіусами r и $r + dr$, концентрически описанные вокругъ точки P; тогда отрѣзанный, такимъ образомъ, элементъ объема въ конусѣ будетъ

$$dv = r^2 d\omega dr$$

и получимъ:

$$dq = kr^2 d\omega dr$$

если k означаетъ свободное электричество въ этомъ элементѣ. Положимъ теперь, что точка P окружена сомкнутою и выпуклою весьма малою поверхностью S. Назовемъ черезъ ρ и R разстоянія между точкою P и поверхностью S и между P и внѣшнею поверхностью тѣла по одному и тому же радіусу, проходящему черезъ P; тогда потенціалъ массы, лежащей внѣ S, будетъ

$$\Sigma \frac{dq}{r} = \iint kr d\omega dr = \int d\omega \int_\rho^R krdr$$

Если здѣсь ρ приближается къ нулю, то интегралъ

$$\int_\rho^R krdr$$

приближается къ извѣстному предѣльному значенію

$$\int_0^R krdr$$

а предѣльное значеніе двойнаго интеграла есть потенціалъ всей массы; тоже самое относится и къ составляющимъ силы. Слагающая по оси X-овъ дѣйствія массъ, находящихся внѣ S (n^0 158), есть

$$-\Sigma \frac{adq}{r^2} = -\int d\omega \int_\rho^R kadr$$

Она также приближается къ извѣстному предѣльному значенію, если ρ подходитъ къ нулю.

162. И такъ, дѣйствующая масса, непосредственно окружающая точку P, немногимъ увеличиваетъ значеніе интеграловъ V, X, Y, Z, не смотря на малость разстоянія; отсюда можно заключить, что эти интегралы конечные и суть сплошныя функціи отъ x, y, z. Пусть V_1 будетъ потенціалъ массы внутри поверхности S, а V_2—потенціалъ

внѣшней массы относительно точки P; далѣе, V_1' и V_2' — потенціалы тѣхъ же самыхъ массъ относительно точки P', лежащей весьма близко къ P внутри S; тогда получимъ:

$$V' - V = (V'_2 - V_2) + V'_1 - V_1$$

Потенціалъ V_2 внѣшней массы, относящійся къ точкѣ P, лежащей не внутри этой массы, есть сплошная функція отъ x, y, z; слѣдовательно разность $V_2' - V_2$ очень мала. Съ другой стороны, каждая изъ величинъ V_1 и V_1' очень малы, слѣдовательно и разность ихъ также мала. Такимъ же образомъ можно убѣдиться, что и X, Y, Z суть сплошныя функціи.

163. Теперь мы докажемъ, что и въ этомъ случаѣ составляющія силы по величинѣ своей равны частнымъ производнымъ потенціала, но съ обратными знаками. Если плотность k жидкости постоянна, то это легко доказать.—Раздѣлимъ дѣйствующую массу на двѣ части: на такую, которая заключается внутри маленькаго шара, гдѣ находится точка P, и на массу, лежащую внѣ шара. Назовемъ V_1 и V_2 потенціалы этихъ двухъ частей, X_1 и X_2 — слагающія силъ, дѣйствующихъ на точку P. Такъ какъ точка P не лежитъ во второй части, то

$$X_2 = -\frac{dV_2}{dx}$$

Далѣе, по свойствамъ однородныхъ шаровыхъ оболочекъ (n^0 160) имѣемъ:

$$X_1 = -\frac{dV_1}{dx}$$

Отсюда выходитъ, что

$$X = -\frac{dV}{dx}$$

164. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда плотность измѣняется. Опишемъ вокругъ точки P, какъ центра, весьма малымъ радіусомъ ρ шаръ S; пусть внутри шара точка P' лежитъ весьма близко къ P, и разстояніе PP' равно a. При этомъ мы докажемъ, что

отношеніе $\frac{V - V'}{a}$ имѣетъ предѣлъ, если a приближается къ нулю, и что этотъ предѣлъ равенъ составляющей силы, направленной по PP'. Означимъ ее черезъ X. Очевидно, что отношеніе $\frac{V_2 - V'_2}{a}$ очень мало отличается отъ X_2; а эта послѣдняя величина сама весьма мало разнится отъ X, такъ что, слѣдовательно, можно написать:

$$V_2 - V'_2 = a\,(X + \varepsilon)$$

при чемъ ε исчезаетъ вмѣстѣ a и ρ.

Чтобы опредѣлить V_1 и V_1', возьмемъ за координаты два разстоянія PM и $P'M$, которыя означимъ чрезъ r и r', отъ какой нибудь точки M и уголъ ψ, составляемый плоскостью PMP' съ неподвижною плоскостью, проходящею черезъ прямую PP'. Элементъ площади PMP' выразится посредствомъ $rdrd\,\Theta$, если Θ означаетъ уголъ MPP'. Допустимъ, что въ отношеніи

$$r'^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\Theta$$

измѣняется Θ, въ то время какъ r остается постояннымъ; тогда получимъ:

$$r'\,dr' = ar\sin\Theta\,d\Theta$$

а элементъ поверхности будетъ

$$\frac{r'\,dr}{a}\frac{dr'}{\sin\Theta} = \frac{rr'\,dr\,dr'}{ay}$$

при чемъ y есть разстояніе элемента отъ оси PP'. Если этотъ элементъ поверхности будетъ вращаться вокругъ оси, то онъ произведетъ элементарный объемъ

$$dv = \frac{rr'\,dr\,dr'\,d\psi}{a}$$

и, слѣдовательно,

$$V_1 = \frac{1}{a}\sum kr'\,dr\,dr'\,d\psi, \quad V_1' = \frac{1}{a}\sum kr\,dr\,dr'\,d\psi$$

Если будемъ интегрировать относительно ψ и вставимъ

$$H = \int_0^{2\pi} k\,d\psi$$

при чемъ H есть функція отъ r и r', то предъидущія выраженія перейдутъ въ слѣдующія:

$$V_1 = \frac{1}{a}\sum Hr'\,dr\,dr', \quad V_1' = \frac{1}{a}\sum Hr\,dr\,dr'$$

а потому

$$V_1 - V_1' = \sum H\frac{r' - r}{a}dr\,dr'$$

Такъ какъ величина H всегда имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ, а отношеніе $\frac{r' - r}{a}$ лежитъ между -1 и $+1$, то можно написать также:

$$V_1 - V_1' = \lambda\sum H\,dr\,dr'$$

гдѣ λ означаетъ число, лежащее между -1 и $+1$. Далѣе, если означить чрезъ H_1 среднее значеніе H, то

$$V_1 - V_1' = \lambda H_1\sum dr\,dr'$$

Чтобы опредѣлить значеніе двойнаго интеграла, проинтегрируемъ сначала по r', а потомъ по r, для чего необходимо разложить его на двѣ части:

$$\int_0^a dr\int_{a-r}^{a+r} dr' + \int_a^\rho dr\int_{r-a}^{r+a} dr' = a\,(2\rho - a)$$

слѣдовательно

$$V_1 - V_1' = \lambda H_1\,a\,(2\rho - a)$$

а потому

$$\frac{V - V'}{a} = X + \varepsilon + \lambda H_1\,(2\rho - a)$$

Но это отношеніе имѣетъ предѣломъ X, если a и ρ приближаются къ нулю [1]).

Поверхности уровней.

165. Подъ поверхностью уровня понимается мѣсто точекъ, въ которыхъ потенціалъ V имѣетъ одно и тоже значеніе. Чрезъ точку P проходитъ поверхность уровня, и только одна. Легко видѣть, что сила, дѣйствующая въ этой точкѣ, перпендикулярна къ поверхности уровня. Нормаль, возстановленная къ этой поверхности изъ точки P, составляетъ съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ пропорціональны частнымъ производнымъ:

$$\frac{dV}{dx},\ \frac{dV}{dy},\ \frac{dV}{dz}$$

а, слѣдовательно, также и составляющимъ силы X, Y, Z. Отсюда выходитъ, что сила перпендикулярна къ поверхности.

Пусть dn будетъ часть нормали, лежащей между двумя безконечно близкими поверхностями уровней V и $V+dV$, и положимъ, что ось X-овъ совпадаетъ съ нормалью; тогда

$$F=X=-\frac{dV}{dn}$$

Слѣдовательно, сила, дѣйствующая въ одной точкѣ, равна производной потенціала по направленію нормали, идущей черезъ разсматриваемую точку, и перпендикулярна къ поверхности уровня, проходящаго чрезъ ту же самую точку; эта сила направлена въ ту сторону, въ которую потенціалъ уменьшается.

Главная теорема.

166. До сихъ поръ мы говорили только о производныхъ потенціала перваго порядка; но вторыя производныя также обладаютъ

[1]) Это остроумное доказательство далъ Буке.

весьма замѣчательными свойствами.—Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда точка P лежитъ внѣ дѣйствующей массы; при этомъ функція $\frac{1}{r}$ не будетъ безконечною, и подъ знакомъ суммы можно дифференцировать какъ обыкновенно. Первое дифференцированіе дастъ (n^0 159):

$$\frac{dV}{dx}=\sum\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}dq=\sum\frac{adq}{r^2}=\sum\frac{x'-x}{r^3}dq$$

второе же —

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\sum\left(-\frac{1}{r^3}-\frac{3\ (x'-x)\ dr}{r^4\ \ dx}\right)dq=\sum\frac{3a^2-1}{r^3}dq$$

Такимъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{d^2V}{dy^2}=\sum\frac{3\,b^2-1}{r^3}dq,\quad \frac{d^2V}{dz^2}=\sum\frac{3\,c^2-1}{r^3}dq$$

Складывая, получимъ:

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=\sum\frac{3\,(a^2+b^2+c^2)-3}{r^3}dq$$

Но, находящаяся подъ знакомъ суммы функція тожественно равна нулю, а, слѣдовательно, и сама сумма равна нулю. И такъ, пока точка лежитъ внѣ дѣйствующей массы, имѣемъ:

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0$$

Для сокращенія, представимъ лѣвую часть символомъ ΔV; тогда предъидущее уравненіе выразится посредствомъ

$$\Delta V=0$$

Если точка P лежитъ внутри дѣйствующей массы, то болѣе уже нельзя поступать такъ, какъ это мы сдѣлали.

При этомъ, выраженія, какъ выведенное нами

$$\sum \frac{3\,a^2-1}{r^3}\,dq$$

не будутъ уже имѣть опредѣленнаго значенія, потому что если мы введемъ для dq его величину $kr^2d\omega dr$, то въ знаменателѣ останется еще множитель r, а функція подъ знакомъ суммы будетъ безконечна. Тогда необходимо прибѣгнуть къ помощи другаго метода.

167. Предположимъ сначала, что дѣйствующая масса имѣетъ постоянную плотность близь точки P. Вообразимъ маленькій описанный шаръ S, заключающій въ себѣ точку P, и означимъ чрезъ V_1 потенціалъ массы, заключенной въ шарѣ, а чрезъ V_2 — потенціалъ массы внѣ этого шара. Положимъ, что начало лежитъ въ центрѣ шара. Мы уже нашли (n^0 160):

$$\frac{dV_1}{dx}=-\frac{4}{3}\pi kx,\quad \frac{dV_1}{dy}=-\frac{4}{3}\pi ky,\quad \frac{dV_1}{dz}=-\frac{4}{3}\pi kz$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{d^2V_1}{dx^2}=\frac{d^2V_1}{dy^2}=\frac{d^2V_1}{dz^2}=-\frac{4}{3}\pi k$$

а потому

$$\Delta V_1=-4\pi k$$

гдѣ k есть плотность въ маленькомъ шарѣ. Съ другой стороны, такъ какъ точка P не лежитъ въ массѣ, находящейся внѣ шара, то

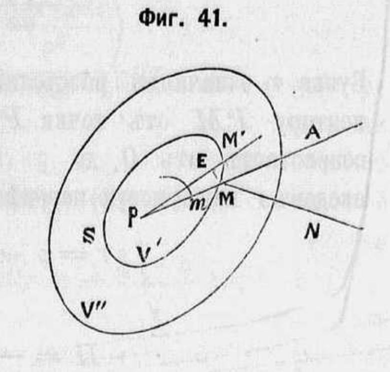
$$\Delta V_2=0$$

и выходитъ, что

$$\Delta V=\Delta V_1+\Delta V_2=-4\pi k$$

168. Совершенно такое же свойство имѣетъ мѣсто и тогда, когда дѣйствующая масса вокругъ точки P неоднородна. Доказательство этому Клаузіусъ велъ слѣдующимъ образомъ.

Представимъ себѣ, какъ прежде, точку P окруженною маленькою, сомкнутою и выпуклою поверхностью (фиг. 41), и назовемъ чрезъ V_1 потенціалъ массы, находящейся внутри этой поверхности, а чрезъ V_2 — потенціалъ внѣшней массы.



Фиг. 41.

Такъ какъ $\Delta V_2=0$, то достаточно опредѣлить ΔV_1.—Построимъ изъ точки P конусъ съ безконечно малымъ угломъ раствoренія $d\omega$. Этотъ конусъ опредѣлитъ элементарный объемъ между двумя концентрическими поверхностями шара, радіусы которыхъ r и $r+dr$, и центръ которыхъ совпадаетъ съ точкою P, —

$$dv=r^2d\omega\,dr$$

Пусть теперь a, b, c будутъ косинусы угловъ, составляемыхъ производящею PM конуса съ осями. Содержащаяся въ элементарномъ объемѣ масса

$$dq=kr^2\,d\omega\,dr$$

производитъ на точку P дѣйствіе

$$\frac{kr^2\,d\omega\,dr}{r^2}=-k d\omega\,dr$$

составляющая котораго по оси X-овъ есть

$$-ak\,d\omega\,dr$$

слѣдовательно получимъ:

$$\frac{dV_1}{dx}=-X_1=\sum ak\,d\omega\,dr=\int a\,d\omega\int_0^\rho kdr$$

гдѣ ρ означаетъ длину радіуса вектора, проведеннаго изъ точки P въ какую нибудь точку M поверхности S.

Положимъ теперь, что

$$H=\int_0^\rho kdr$$

тогда предъидущее выраженіе приметъ видъ:

$$\frac{dV_1}{dx} = \int aHd\omega$$

Буква r означаетъ разстояніе какой нибудь точки m по радіусу вектору PM отъ точки P, и въ интегралѣ H эта перемѣнная возрастаетъ отъ 0 до ρ. Назовемъ чрезъ r' разстояніе Mm и введемъ r' какъ новую перемѣнную; тогда

$$r = \rho - r', \quad dr = -dr'$$

$$H = -\int_\rho^0 kdr' = \int_0^\rho kdr'$$

И такъ, интегралъ сохраняетъ одно и тоже значеніе, но разстояніе считается уже не отъ P, а отъ поверхности S. Онъ зависитъ отъ направленія радіуса вектора MP и отъ его длины, а, слѣдовательно, онъ есть функція четырехъ перемѣнныхъ a, b, c, ρ, изъ которыхъ только три независимыя, вслѣдствіе существующаго отношенія между тремя косинусами. Конусъ $d\omega$ отрѣзываетъ отъ поверхности S элементъ MM', который означимъ $d\sigma$, а отъ описанной вокругъ точки P шаровой поверхности радіусомъ ρ — элементъ ME, равный $\rho^2 d\omega$. Если α, β, γ будутъ косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью, возстановленною изъ точки M къ поверхности, съ осями, а i — уголъ между этою нормалью и продолженіемъ MA радіуса вектора PM, то

$$\rho^2 d\omega = d\sigma \cos i$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dV_1}{dx} = \int a\,H\,d\omega = \int \frac{a\,H\cos i}{\rho^2}\,d\sigma$$

Эта новая форма представляетъ ту выгоду, что дифференціалъ $d\sigma$ и предѣлы интегрированія совершенно не зависятъ отъ положенія точки P внутри поверхности S; кромѣ того, выраженіе, находящееся подъ знакомъ интеграла, постоянно имѣетъ конечное значеніе.

Поэтому подъ знакомъ интеграла можно дифференцировать обыкновеннымъ образомъ, и получимъ:

$$\frac{d^2V_1}{dx^2} = \int \frac{d\left(\frac{aH\cos i}{\rho^2}\right)}{dx}\,d\sigma$$

Если ξ, η, ζ—координаты M, то

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

$$a = \frac{\xi - x}{\rho}, \quad b = \frac{\eta - y}{\rho}, \quad c = \frac{\xi - z}{\rho}$$

$$\cos i = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

$$\rho \cos i = \alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z)$$

Но, далѣе

$$\frac{aH\cos i}{\rho^2} = \frac{a}{\rho^3}\,\rho\cos i\,H$$

Отсюда выходитъ, что

$$\frac{d\left(\frac{aH\cos i}{\rho^2}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{a}{\rho^3}\right)}{dx} H\rho\cos i + \frac{d(\rho\cos i)}{dx}\frac{aH}{\rho^3} + \frac{dH}{dx}\frac{a\cos i}{\rho^2}$$

Такъ какъ

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\xi - x}{\rho} = -a$$

$$\frac{d\left(\frac{a}{\rho^3}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\xi - x}{\rho^4}\right)}{dx} = -\frac{1}{\rho^4} - 4\,\frac{\xi - x}{\rho^5}\frac{d\rho}{dx} = \frac{4a^2 - 1}{\rho^4}$$

$$\frac{d(\rho\cos i)}{dx} = -\alpha$$

то, слѣдовательно,

$$\frac{d\left(\frac{aH\cos i}{\rho^2}\right)}{dx} = \frac{4a^2 - 1}{\rho^3}H\cos i - \frac{a\,\alpha\,H}{\rho^3} + \frac{a\cos i}{\rho^2}\frac{dH}{dx}$$

а потому

$$\frac{d^2V_1}{dx^2} = \int \frac{H}{\rho^3}\left[(4a^2-1)\cos i - a\alpha\right]d\sigma + \int \frac{a\cos i}{\rho^2}\frac{dH}{dx}d\sigma$$

Такимъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{d^2V_1}{dy^2} = \int \frac{H}{\rho^3}\left[(4b^2-1)\cos i - b\beta\right]d\sigma + \int \frac{b\cos i}{\rho^2}\frac{dH}{dy}d\sigma$$

$$\frac{d^2V_1}{dz^2} = \int \frac{H}{\rho^3}\left[(4c^2-1)\cos i - c\gamma\right]d\sigma + \int \frac{c\cos i}{\rho^2}\frac{dH}{dz}d\sigma$$

Складывая эти выраженія, легко замѣтить, что члены перваго интеграла исчезнутъ и будетъ:

$$\frac{d^2V_1}{dx^2} + \frac{d^2V_1}{dy^2} + \frac{d^2V_1}{dz^2} = \int \frac{\cos i}{\rho^2}\left(a\frac{dH}{dx} + b\frac{dH}{dy} + c\frac{dH}{dz}\right)d\sigma$$

Какъ мы уже сказали, величина H есть функція отъ a, b, c, ρ; но эти величины, съ своей стороны, суть также извѣстныя функціи координатъ x, y, z точки P; поэтому

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dH}{da}\frac{da}{dx} + \frac{dH}{db}\frac{db}{dx} + \frac{dH}{dc}\frac{dc}{dx} + \frac{dH}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}$$

Но, такъ какъ

$$\frac{da}{dx} = -\frac{1}{\rho} - \frac{\xi - x}{\rho^2}\frac{d\rho}{dx} = \frac{a^2-1}{\rho}$$

$$\frac{db}{dx} = -\frac{\eta - y}{\rho^2}\frac{d\rho}{dx} = \frac{ab}{\rho},\ \frac{dc}{dx} = \frac{ac}{\rho}$$

то

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dH}{da}\frac{a^2-1}{\rho} + \frac{dH}{db}\frac{ab}{\rho} + \frac{dH}{dc}\frac{ac}{\rho} - \frac{dH}{d\rho}a$$

или

$$\frac{dH}{dx} = \frac{a}{\rho}\left(a\frac{dH}{da} + b\frac{dH}{db} + c\frac{dH}{dc}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{dH}{da} - a\frac{dH}{d\rho}$$

Такимъ же образомъ найдется:

$$\frac{dH}{dy} = \frac{b}{\rho}\left(a\frac{dH}{da} + b\frac{dH}{db} + c\frac{dH}{dc}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{dH}{db} - b\frac{dH}{d\rho}$$

$$\frac{dH}{dz} = \frac{c}{\rho}\left(a\frac{dH}{da} + b\frac{dH}{db} + c\frac{dH}{dc}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{dH}{dc} - c\frac{dH}{d\rho}$$

а потому

$$a\frac{dH}{dx} + b\frac{dH}{dy} + c\frac{dH}{dz} = -\frac{dH}{d\rho}$$

и выраженіе ΔV_1 перейдетъ въ

$$\Delta V_1 = -\int \frac{\cos i}{\rho^2}\frac{dH}{d\rho}d\sigma$$

Мы положили, что

$$H = \int_0^\rho k\,dr'$$

при чемъ функція подъ знакомъ интеграла не зависитъ отъ σ, а верхній предѣлъ зависитъ только отъ ρ. Назовемъ чрезъ k_1 плотность электрической жидкости въ точкѣ P; тогда

$$\frac{dH}{d\rho} = k_1$$

и потому

$$\Delta V_1 = -k_1\int \frac{\cos i}{\rho^2}d\sigma = -k_1\int d\omega$$

Этотъ двойной интегралъ распространяется на всю поверхность шара, описанную вокругъ точки P, какъ центра, радіусомъ 1, и, слѣдовательно,

$$\Delta V_1 = -4\pi k_1$$

а потому также

$$\Delta V = -4\pi k_1$$

такъ какъ $\Delta V_2 = 0$.

Такимъ образомъ выраженіе ΔV равно нулю или $-4\pi k_1$, смотря потому, лежитъ ли точка P внѣ или внутри дѣйствующей массы. Оба случая можно разсматривать съ одной точки зрѣнія. Если означимъ черезъ k плотность дѣйствующей массы въ точкѣ P, то будетъ пригодно совершенно общее отношеніе:

$$(I) \qquad \Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi k$$

Равновѣсіе электричества въ системѣ совершенныхъ проводниковъ.

169. Совершенный проводникъ есть тѣло, не представляющее движенію электричества никакого сопротивленія.—Разсмотримъ систему изолированныхъ проводниковъ, въ которыхъ сгущено данное количество электричества, и назовемъ чрезъ V потенціалъ всей системы на какую нибудь точку P. Для равновѣсія электричества необходимо и достаточно, чтобы потенціалъ внутри каждаго проводника имѣлъ постоянное значеніе, потому что еслибы мы предположили потенціалъ въ одномъ изъ нихъ перемѣнною величиною, то на свободную электрическую массу m, находящуюся въ тѣлѣ, дѣйствовала бы сила, равная $-m\frac{dV}{dn}$, и, вслѣдствіе того, масса эта двигалась бы по направленію сказанной силы. Съ другой стороны, еслибы также на двѣ противоположныя электрическія массы $+m$ и $-m$, образующія безконечно малое количество нейтральной смѣси, дѣйствовали двѣ равныя, но противоположныя силы, то эти массы двигались бы въ противоположномъ направленіи, и нейтральная смѣсь раздѣлилась бы. Слѣдовательно, потенціалъ всей системы въ первомъ проводникѣ долженъ имѣть постоянное значеніе V_1, во второмъ — V_2 и т. д. Кромѣ того, ясно, что это условіе достаточно для равновѣсія. Напротивъ того, потенціалъ измѣняется въ изолирующихъ промежуткахъ, которыми отдѣляются тѣла другъ отъ друга.

170. Такъ какъ потенціалъ въ каждомъ тѣлѣ имѣетъ постоянное значеніе, то первыя производныя $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$ во всѣхъ точкахъ тѣлъ равны нулю; то же самое относится и ко вторымъ производнымъ $\frac{d^2V}{dx^2}, \frac{d^2V}{dy^2}, \frac{d^2V}{dz^2}$. И такъ, въ каждомъ тѣлѣ $\Delta V = 0$, а изъ отношенія $\Delta V = -4\pi k$ заключаемъ, что плотность свободнаго электричества внутри проводниковъ равна нулю, и, слѣдовательно, внутри ихъ совершенно не существуетъ свободнаго электричества. Отсюда выходитъ, что свободное электричество распространяется безконечно тонкимъ слоемъ по поверхности каждаго проводника.

Пусть $d\sigma$ означаетъ элементъ поверхности, а ε — толщину слоя въ этомъ мѣстѣ; тогда находящееся на этомъ элементѣ поверхности свободное электричество будетъ $dq = k\varepsilon d\sigma$. Такъ какъ величину ε опредѣлить нельзя, то положимъ $k\varepsilon = h$; отсюда слѣдуетъ, что $dq = h\,d\sigma$. Коеффиціентъ h означаетъ *плотность электрическаго слоя*. Количество свободнаго электричества, которое находится на поверхности тѣла, или его электрическій зарядъ есть

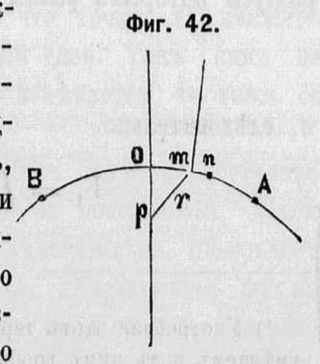
$$Q = \int h\,d\sigma$$

а потенціалъ его —

$$V = \int \frac{h\,d\sigma}{r}$$

171. Какъ мы уже видѣли, въ каждомъ проводникѣ потенціалъ сохраняетъ постоянное значеніе; внѣ же тѣлъ, въ пространствѣ, которымъ раздѣляются проводники, онъ постоянно измѣняется. Докажемъ, что послѣднее свойство имѣетъ мѣсто и тогда, когда точка P проходитъ электрическій слой. — Предположимъ теперь, что точка P находится въ весьма маломъ разстояніи отъ электрическаго слоя и что оно измѣряется нормалью PO (фиг. 42) къ этому слою. Назовемъ чрезъ V_1

Фиг. 42.



потенціалъ весьма малой зоны [1]) AB, заключающей въ себѣ точку O, а чрезъ V_2 — потенціалъ прочихъ электрическихъ массъ; тогда

$$V = V_1 + V_2$$

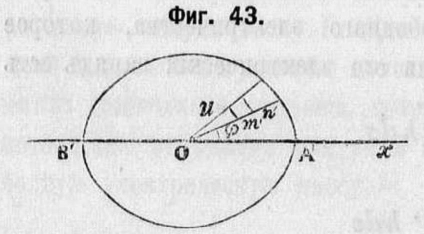
На элементѣ зоны распространено количество $hd\sigma$ электричества; поэтому потенціалъ зоны выразится посредствомъ

$$V_1 = \int \frac{h\,d\sigma}{r}$$

Проэктируемъ зону AB на касательную плоскость, проходящую черезъ точку O, и назовемъ γ косинусъ угла, составляемаго нормалью въ m съ нормалью въ точкѣ O, а $d\sigma'$ — проэкцію элемента $d\sigma$; тогда получимъ:

$$d\sigma' = \gamma\, d\sigma$$

Фиг. 43.



Проведемъ въ касательной плоскости неподвижную ось Ox (фиг. 43) и опредѣлимъ элементъ $d\sigma'$ посредствомъ двухъ прямыхъ, составляющихъ съ осью Ox углы φ и $\varphi + d\varphi$, и посредствомъ двухъ дугъ, описанныхъ изъ точки O, радіусы которыхъ равны u и $u + du$; тогда

$$d\sigma' = u\, du\, d\varphi$$

и, слѣдовательно,

$$V_1 = \int \frac{h\,d\sigma'}{\gamma r} = \iint \frac{hu\,du\,d\varphi}{\gamma r}$$

[1]) Употребляя этотъ терминъ и въ дальнѣйшемъ переводѣ, мы подразумѣваемъ подъ нимъ вообще какую нибудь часть поверхности.

Примѣч. перев.

Если ψ означаетъ уголъ, составляемый прямою Pm съ нормалью PO (фиг. 42), то

$$u = r \sin\psi$$

$$V_1 = \iint \frac{h \sin\psi}{\gamma}\, du\, d\varphi$$

или

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} \frac{h \sin\psi}{\gamma}\, du$$

Пусть h_1 будетъ наибольшее значеніе h на зонѣ, а γ_1 — наименьшее значеніе величины γ, весьма близкой къ единицѣ; тогда для любой точки зоны:

$$\frac{h \sin\psi}{\gamma} < \frac{h_1}{\gamma_1}$$

и, слѣдовательно,

$$\int_0^{\rho} \frac{h \sin\psi}{\gamma}\, du < \frac{h_1}{\gamma_1}\rho$$

Если мы предположимъ, что проэкція зоны на касательную плоскость есть кругъ съ радіусомъ ρ, то

$$V_1 < 2\pi \frac{h_1}{\gamma_1}\rho$$

Отсюда выходитъ, что зона увеличиваетъ полный потенціалъ только весьма малою величиною. — Положимъ, что точка P движется по нормали PO и проходитъ электрическій слой. Такъ какъ величина V_1 весьма мала, а V_2 постоянно измѣняется, то тоже самое должно относиться и къ V.

172. Въ каждомъ проводникѣ потенціалъ имѣетъ постоянное значеніе и это значеніе такое же, какъ и на поверхности, потому что функція измѣняется непрерывно; слѣдовательно, поверхность такого тѣла есть поверхность уровня. Сила, дѣйствующая на количество электричества $hd\sigma$, находящагося на элементѣ поверхности тѣла, есть $-\frac{h\,dV}{dn}d\sigma$, при чемъ производная взята ко внѣ;

направленіе силы извнутри внаружу, и уничтожается она противодѣйствіемъ воздуха или изолирующею оболочкою. Отсюда выходитъ, что если h положительное, — функція V уменьшается, если идти извнутри тѣла внаружу; обратное же имѣетъ мѣсто тогда, когда h — отрицательное.

Сила, о которой мы только что говорили, производитъ на изолирующія тѣла давленіе, на единицу площади равное $-h\frac{dV}{dn}$.

Далѣе, замѣтимъ, что $\frac{dV}{dn}$ измѣняетъ свое значеніе вдругъ, когда точка P проходитъ черезъ электрическій слой, потому что внутри эта производная равна нулю, а внѣ имѣетъ конечную величину, отличную отъ нуля.

Совокупность двухъ состояній равновѣсія составляетъ также равновѣсіе, потому что если V и V' суть потенціалы относительно первыхъ двухъ равновѣсій, то потенціалъ $V+V'$, происходящій изъ нихъ, имѣетъ внутри каждаго проводника постоянно одно и тоже значеніе.

Если электрическая плотность въ каждой точкѣ будетъ измѣняться въ постоянномъ отношеніи, то при этомъ все-таки произойдетъ состояніе равновѣсія, потому что потенціалъ пріобрѣтетъ множителемъ это же самое отношеніе, и, слѣдовательно, сохранитъ постоянное значеніе внутри каждаго тѣла.

Разсмотримъ одинъ только проводникъ, находящійся въ изолирующей средѣ. Послѣ мы докажемъ, что данное количество свободнаго электричества можетъ распредѣлиться по поверхности такого тѣла всегда однимъ только образомъ. При чемъ, изъ предъидущаго выходитъ, что если извѣстенъ законъ распредѣленія количества электричества Q_1 по поверхности тѣла, то этимъ опредѣлится также и распредѣленіе какого нибудь другаго его количества Q,—для чего достаточно только умножить плотность въ каждой точкѣ на отношеніе $\frac{Q}{Q_1}$, или, другими словами, положить

$$h = h_1 \frac{Q}{Q_1}.$$

Такъ какъ потенціалъ измѣняется въ томъ же самомъ отношеніи, то $V = V_1 \frac{Q}{Q_1}$ и, слѣдовательно,

$$\frac{dV}{dn} = \frac{Q}{Q_1}\frac{dV_1}{dn}$$

$$h\frac{dV}{dn} = h_1\frac{dV_1}{dn} \times \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^2$$

Такимъ образомъ, давленіе, производимое въ каждой точкѣ, пропорціонально квадрату заряжанія.

Распредѣленіе электричества на шарѣ или на эллипсоидѣ.

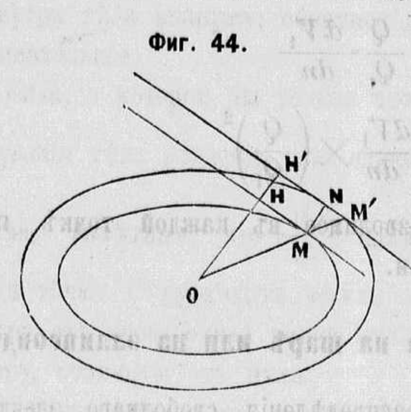
173. Изслѣдованія закона распредѣленія свободнаго электричества по поверхности изолированнаго проводника, неподверженнаго дѣйствію другаго электрическаго тѣла, представляютъ весьма большія математическія затрудненія. Такъ какъ этотъ вопросъ выходитъ изъ рамокъ настоящей книги, то мы ограничимся приведеніемъ нѣкоторыхъ простыхъ примѣровъ.

Ясно, что электрическій слой на шарѣ долженъ имѣть вездѣ одно и тоже свойство; поэтому, если a означаетъ радіусъ шара, то плотность слоя будетъ $h = \frac{Q}{4\pi a^2}$. Потенціалъ (n^0 160) внутри есть $\frac{Q}{a}$, а внѣ $\frac{Q}{\rho}$, если ρ означаетъ разстояніе отъ точки P до центра. Давленіе электричества есть $\frac{Q^2}{4\pi a^4}$.

Разсмотримъ теперь проводникъ эллипсоидальной формы. Представимъ себѣ вторую подобную и концентрическую эллипсоидальную поверхность, окружающую первую и весьма близко лежащую къ ней, и положимъ, что промежутокъ между ними наполненъ жидкостью съ постоянною плотностью k. Мы знаемъ, что такой однородный эллипсоидальный слой не производитъ никакого дѣйствія на точку внутри. Потенціалъ внутри постоянный, и этотъ слой можетъ служить для выраженія закона распредѣленія электри-

чества по поверхности эллипсоида. Пусть $1+\alpha$ будетъ отношеніе подобія обѣихъ поверхностей, и α весьма мало. Далѣе, пусть p означаетъ перпендикуляръ OH (фиг. 44), опущенный изъ центра на касательную плоскость, проведенную въ M; при этомъ толщина ε слоя въ M равна разстоянію MN касательныхъ плоскостей въ сходныхъ точкахъ M и M', которое равно $p\alpha$. Такимъ образомъ

Фиг. 44.



$$h = k\varepsilon = k\alpha p$$

и, слѣдовательно, плотность h электрическаго слоя въ каждой точкѣ M пропорціональна разстоянію отъ центра до касательной плоскости въ этой точкѣ. Линія равной плотности есть такая линія, которая соединяетъ на поверхности эллипсоида точки, въ которыхъ касательныя къ нему плоскости въ тоже время будутъ и касательными плоскостями для даннаго концентрическаго шара. Если означимъ чрезъ a, b, c длины полуосей эллипсоида, то объемъ слоя будетъ $\frac{4}{3}\pi abc\,[(1+\alpha)^3 - 1]$, что̀ весьма близко къ $4\pi abc\alpha$; поэтому, сгущенная въ немъ масса или электрическій зарядъ будетъ

$$Q = 4\pi abc\alpha k$$

Откуда выходитъ, что

$$h = \frac{Qp}{4\pi abc}$$

Но, далѣе имѣемъ:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

Если положить c весьма малымъ, то эллипсоидъ перейдетъ въ безконечно тонкій эллипсоидальный дискъ. Такъ какъ

$$\text{пред. } \frac{p}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

то въ этомъ случаѣ

$$h = \frac{Q}{4\pi ab} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

При этомъ линіи равной плотности суть концентрическіе и подобные эллипсы, а электрическая плотность возрастаетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе удаляемся по радіусу вектору отъ центра.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Продолженіе электростатики.

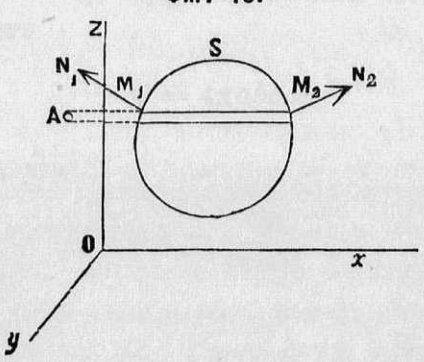
Формула Грина. — Теоремы, которыя изъ нея слѣдуютъ. — Электризованіе чрезъ вліяніе.

Формула Грина [1]).

174. Пусть U и V будутъ какія нибудь двѣ конечныя и сплошныя функціи отъ x, y, z. Положимъ, какъ прежде,

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2}$$

Фиг. 45.



[1]) Green, Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. XXXIX, Bd. XLIV и Bd. XLVII.

и разсмотримъ интегралъ

$$\iiint U \Delta V \, dx\, dy\, dz$$

распространяющійся на объемъ, ограниченный сомкнутою и выпуклою поверхностью S (фиг. 45). Этотъ интегралъ состоитъ изъ трехъ членовъ вида:

$$\iiint U \frac{d^2 V}{dx^2} dx\, dy\, dz = \iint dy\, dz \int U \frac{d^2 V}{dx^2} dx$$

Въ интегралѣ $\int U \frac{d^2 V}{dx^2} dx$ координаты y и z постоянныя, а предѣлы интегрированія суть абсциссы x_1 и x_2 двухъ точекъ M_1 и M_2, въ которыхъ прямая, параллельная оси X-овъ, пересѣкаетъ поверхность S. Поэтому, интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\int_{x_1}^{x_2} U \frac{d^2 V}{dx^2} dx = -\left(U \frac{dV}{dx}\right)_{x_1} + \left(U \frac{dV}{dx}\right)_{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dU}{dx} \frac{dV}{dx} dx$$

и, слѣдовательно,

$$\iiint U \frac{d^2 V}{dx^2} dx\, dy\, dz = \iint \left[-\left(U \frac{dV}{dx}\right)_{x_1} + \left(U \frac{dV}{dx}\right)_{x_2}\right] dy\, dz$$

$$-\iiint \frac{dU}{dx} \frac{dV}{dx} dx\, dy\, dz$$

Произведеніе $dx\, dy\, dz$ представляетъ элементарный объемъ dv, а $dy\, dz$ есть проэкція $d\omega$ элемента поверхности на плоскость YZ; поэтому предъидущее уравненіе можно написать проще:

$$\int U \frac{d^2 V}{dx^2} dv = \int \left[-\left(U \frac{dV}{dx}\right)_{x_1} + \left(U \frac{dV}{dx}\right)_{x_2}\right] d\omega$$

$$-\int \frac{dU}{dx} \frac{dV}{dx} dv$$

Элементъ $d\omega$ есть проэкція двухъ элементовъ поверхности S, $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$, на плоскость YZ, которые соотвѣтствуютъ точкамъ M_1 и M_2. Означимъ α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 косинусы угловъ, составляемыхъ нормалями M_1N_1 и M_2N_2 къ поверхности въ точкахъ M_1 и M_2 съ тремя осями, принимая всегда, что эти нормали проводятся извнутри объема внаружу; тогда

$$d\omega = -\alpha_1 d\sigma_1 = +\alpha_2 d\sigma_2$$

и, слѣдовательно,

$$\int\left[-\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_1}+\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2}\right]d\omega$$

$$=\int\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_1}\alpha_1 d\sigma_1+\int\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2}\alpha_2 d\sigma_2$$

Но правая часть равна интегралу

$$\int U\frac{dV}{dx}\alpha\, d\sigma$$

распространяющемуся на всю поверхность S, и, слѣдовательно, выходитъ, что

$$\int U\frac{d^2V}{dx^2}dv=\int \alpha U\frac{dV}{dx}d\sigma-\int\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}dv$$

Такимъ же образомъ двѣ прочія части первоначально упомянутаго общаго интеграла дадутъ:

$$\int U\frac{d^2V}{dy^2}dv=\int \beta U\frac{dV}{dy}d\sigma-\int\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}dv$$

$$\int U\frac{d^2V}{dz^2}dv=\int \gamma U\frac{dV}{dz}d\sigma-\int\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}dv$$

Складывая эти три уравненія почленно, получимъ:

$$\int U\Delta V\,dv=\int U\left(\alpha\frac{dV}{dx}+\beta\frac{dV}{dy}+\gamma\frac{dV}{dz}\right)d\sigma$$

$$-\int\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right)dv$$

Пусть теперь ds будетъ элементъ MM' нормали, проведенной внаружу изъ точки M на поверхности S; тогда косинусы угловъ между этою нормалью и осями можно выразить посредствомъ:

$$\alpha=\frac{dx}{ds},\ \beta=\frac{dy}{ds},\ \gamma=\frac{dz}{ds}$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\alpha\frac{dV}{dx}+\beta\frac{dV}{dy}+\gamma\frac{dV}{dz}=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dV}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dV}{dz}\frac{dz}{ds}=\frac{dV}{ds}$$

вслѣдствіе чего окончательно получимъ:

$$(\alpha)\int U\Delta V\,dv=\int U\frac{dV}{ds}d\sigma-\int\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right)dv$$

Здѣсь двойной интегралъ распространяется на всю поверхность S, а тройной—на весь объемъ, ограниченный этою поверхностью. Это и есть формула Грина.

Для простоты, мы предположили, что объемъ ограниченъ выпуклою поверхностью; но тоже самое разсужденіе можетъ быть приложено и къ объему, ограниченному какъ угодно. Какую бы форму ни имѣлъ объемъ, параллельная оси X-овъ встрѣчаетъ поверхность S постоянно въ точкахъ M_1, M_2, M_3, M_4, ... При этомъ интегралъ

$$\int U\frac{d^2V}{dx^2}dx$$

сначала простирается отъ x_1 до x_2, потомъ — отъ x_3 до x_4 и т. д.

Преобразовавъ, какъ прежде, каждый изъ этихъ частныхъ интеграловъ, получимъ:

$$\int U\frac{d^2V}{dx^2}dx = -\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_1} + \left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2} - \left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_3} + \left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_4} - \ldots - \int\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}dx$$

и, слѣдовательно,

$$\int U\frac{d^2V}{dx^2}dv = \int\left[-\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_1} + \left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2} - \left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_3} + \left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_4} - \ldots\right]d\omega - \int\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}dv$$

Но, замѣчая, что

$$d\omega = -\alpha_1 d\sigma_1 = +\alpha_2 d\sigma_2 = -\alpha_3 d\sigma_3 = +\alpha_4 d\sigma_4 = \ldots\ldots$$

увидимъ, что первый членъ въ правой части есть не что иное, какъ интегралъ

$$\int U\frac{dV}{dx}\alpha d\sigma$$

распространяющійся на всю поверхность, при чемъ нормали въ каждой точкѣ взяты ко внѣ. Такимъ образомъ, формула Грина есть совершенно общая формула.

Теорема вторая.

175. Въ послѣдующемъ мы предположимъ, что V означаетъ потенціалъ системы электрическихъ массъ, или, общнѣе,—дѣятеля, дѣйствія котораго совершаются по закону Ньютона. Если въ формулѣ Грина положить $U = 1$, то она сведется на

$$(\beta) \qquad \int\Delta V dv = \int\frac{dV}{ds}d\sigma$$

и если потомъ ΔV замѣнить его значеніемъ $-4\pi k$, то она будетъ

$$-4\pi\int k\,dv = \int\frac{dV}{ds}d\sigma$$

Но интегралъ $\int k\,dv$ есть не что иное, какъ сумма совокупно дѣйствующихъ массъ, лежащихъ внутри разсматриваемаго объема, и, слѣдовательно, получимъ отношеніе:

$$(II) \qquad \int\frac{dV}{ds}d\sigma = -4\pi Q$$

Это отношеніе можно выразить еще слѣдующимъ образомъ. Мы обозначили ds элементъ нормали MM', возстановленной внаружу къ поверхности S (фиг. 46). Проведемъ теперь двѣ поверхности уровня V и $V+dV$ черезъ точки M и M'; назовемъ dn элементъ MN нормали, возстановленной къ поверхности V въ точкѣ M, — элементъ, находящійся между двумя поверхностями уровня; наконецъ, означимъ черезъ i уголъ $M'MN$ между обѣими нормалями; тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ MNM'

Фиг. 46.

$$dn = ds \cos i$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn}\cos i = -F\cos i$$

если F означаетъ силу, дѣйствующую въ M и имѣющую направленіе MN, перпендикулярное къ поверхности уровня. При этомъ $F\cos i$ есть проэкція этой силы на нормаль MM' къ поверхности S; слѣдовательно, уравненіе (II) приметъ видъ:

$$(II)' \qquad \int F\cos i\,d\sigma = 4\pi Q$$

Поэтому, выражая словами, выходитъ, что сумма слагающихъ

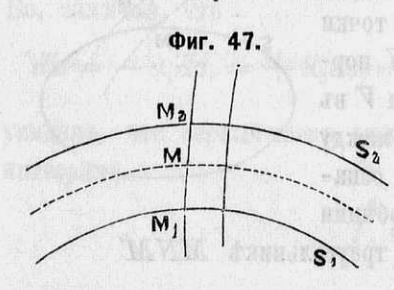
силъ, перпендикулярныхъ къ поверхности и дѣйствующихъ на различные элементы сомкнутой поверхности, равна дѣйствующей массѣ, окруженной этою поверхностью и умноженной на постоянный коэффиціентъ 4π.

Теорема третья.

176. Разность силъ, дѣйствующихъ на два соотвѣтствующіе элемента двухъ поверхностей уровня, равна дѣйствующей массѣ, заключенной въ ортогональномъ каналѣ между этими обоими элементами, умноженной на постоянной коэффиціентъ 4π.

Пусть S_1 и S_2 будутъ двѣ поверхности уровня (фиг. 47). Возьмемъ на первой элементъ $d\sigma_1$ и чрезъ всѣ точки линіи, ограничивающей этотъ элементъ, проведемъ линіи, ортогональныя къ поверхности уровня, лежащей между S_1 и S_2. Образовавшійся такимъ образомъ каналъ отрѣжетъ на поверхности S_2 соотвѣтствующій элементъ $d\sigma_2$. Приложимъ теперь высказанную выше теорему къ объему, замкнутому въ каналѣ двумя ограничивающими элементами. При этомъ, интегралъ слѣдуетъ распространить на всю поверхность канала.—Въ каждой точкѣ ограничивающей боковой поверхности сила представляетъ касательную къ ортогональной линіи, слѣдовательно ея перпендикулярная слагающая равна нулю, а интегралъ сведется на два члена, происходящіе отъ двухъ основныхъ поверхностей $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$. Если принять нормали положительными по направленію $M_1\ M_2$, то изъ отношенія (II) выйдетъ, что

Фиг. 47.



$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1 = -4\pi q$$

гдѣ q есть масса, заключающаяся въ ортогональномъ каналѣ.

Теорема Шасля есть особый случай предъидущаго, потому что если между двумя поверхностями уровня совершенно не существуетъ дѣйствующей массы, то

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1$$

и, слѣдовательно, силы, дѣйствующія на соотвѣтствующіе элементы поверхностей уровня, равны между собою.

Теорема четвертая.

177. Плотность электрическаго слоя въ какой нибудь точкѣ равна силѣ, дѣйствующей на эту точку, раздѣленной на постоянный множитель 4π.

Если въ системѣ электрическихъ проводниковъ существуетъ равновѣсіе, то поверхность S одного изъ этихъ проводниковъ представляетъ поверхность уровня, и на ней распространяется электрическій слой. Назовемъ $d\sigma$ элементъ этой поверхности, и разсмотримъ двѣ смежныя поверхности уровня, изъ которыхъ одна S_2 пусть лежитъ внаружу отъ элемента $d\sigma$, а другая S_1, напротивъ того,—во внутрь. Проведемъ чрезъ всѣ точки линіи, ограничивающей $d\sigma$, ортогонали ко внѣ, къ лежащимъ между S и S_2 поверхностямъ уровня, и продолжимъ ихъ произвольно внутрь до поверхности S_1: отъ этого образуется каналъ, отрѣзывающій отъ поверхностей S_2 и S_1 элементы $d\sigma_2$ и $d\sigma_1$. Если мы будемъ примѣнять отношеніе (II) къ объему въ этомъ каналѣ, то должны распространить интегралъ на всю поверхность, замыкающую этотъ объемъ. Для всей части, лежащей внутри кондуктора, отдѣльные элементы интеграла равны нулю, потому что здѣсь dV—нуль. Для каждой точки боковой поверхности, на внѣшней части канала, нормаль въ тоже время есть и касательная къ поверхности уровня, проходящей черезъ эту точку; поэтому $\frac{dV}{ds} = 0$; слѣдовательно, отдѣльные элементы интеграла для этой части боковой поверхности также рав-

ны нулю. Такимъ образомъ интегралъ сведется на одинъ только элементъ $\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2$, доставляемый внѣшнимъ основаніемъ $d\sigma_2$. Съ другой стороны, содержащаяся въ каналѣ электрическая масса, если h означаетъ плотность электрическаго слоя на элементѣ $d\sigma$, есть $h d\sigma$, а потому уравненіе (II) дастъ:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = -4\pi h\, d\sigma$$

или

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 \frac{d\sigma_2}{d\sigma} = -4\pi h$$

Положимъ теперь, что внѣшняя поверхность S_2 постепенно приближается къ поверхности S; тогда и отношеніе $\frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}$ приближается къ единицѣ, а предъидущее уравненіе будетъ:

$$(IV) \qquad \frac{dV}{dn} = -4\pi h$$

при чемъ производная взята ко внѣ.

178. Слѣдствіе. Давленіе, производимое электрическимъ слоемъ на изолирующую среду и приходящееся на единицу поверхности, равно $-h\frac{dV}{dn}$ (n^0 172) или $4\pi h^2$. Слѣдовательно, **давленіе въ каждой точкѣ пропорціонально квадрату плотности слоя въ этомъ мѣстѣ.**

Въ изолированномъ эллипсоидѣ, неподверженномъ дѣйствію другихъ электрическихъ тѣлъ, это давленіе равняется

$$\frac{Q^2p^2}{4\pi a^2b^2c^2}$$

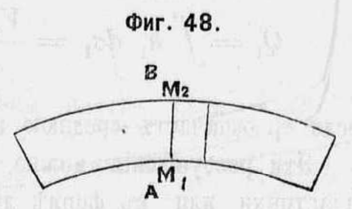
гдѣ Q означаетъ зарядъ, а p — разстояніе между центромъ и касательною плоскостью, проведенною въ разсматриваемой точкѣ (n^0 173).

Теорема пятая.

179. **Соотвѣтствующіе элементы двухъ противолежащихъ слоевъ содержатъ равное, но противоположное количество электричества.**

Разсмотримъ два противолежащихъ изолированныхъ проводника A и B (фиг. 48), при чемъ два отрѣзка поверхностей S_1 и S_2 впадаютъ въ одинъ и тотъ же ортогональный каналъ, который не долженъ содержать между обоими электрическими слоями на S_1 и S_2 никакой другой электрической массы. Назовемъ теперь чрезъ $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ соотвѣтствующіе элементы двухъ слоевъ,—элементы, находящіеся въ одномъ и томъ же безконечно маломъ ортогональномъ каналѣ. Представимъ себѣ, что этотъ каналъ продолженъ какимъ нибудь образомъ въ каждомъ изъ обоихъ тѣлъ A и B и замкнутъ съ двухъ концовъ; тогда, если приложимъ къ этому объему отношеніе (II), всѣ элементы интеграла будутъ равны нулю. Напротивъ того, электрическая масса, находящаяся въ этомъ объемѣ, будетъ $h_1 d\sigma_1 + h_2 d\sigma_2$, если h_1 и h_2 означаютъ плотности на $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$; поэтому уравненіе сведется на

Фиг. 48.



$$(V) \qquad h_1 d\sigma_1 + h_2 d\sigma_2 = 0$$

180. Слѣдствіе. Положимъ, что обѣ поверхности S_1 и S_2 весьма близки другъ къ другу, и означимъ разстояніе между ними $M_1 M_2$ черезъ e; тогда элементы $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ будутъ почти равны, и приблизительно получимъ: $h_2 = -h_1$. Но, по отношенію (IV), плотность

$$h_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}$$

A въ направленіи отъ M_1 къ M_2 производная немногимъ отли-

чается отъ $\frac{V_2 - V_1}{e}$; вслѣдствіе чего получимъ приблизительную формулу:

$$h_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}$$

Слѣдовательно, электрическая плотность въ каждой точкѣ обратно пропорціональна разстоянію обѣихъ поверхностей.

Для заряжанія приблизительно имѣемъ:

$$Q_1 = \int h_1 \, d\sigma_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi} \int \frac{d\sigma_1}{e} = \frac{(V_1 - V_2) S_1}{4\pi e_1}$$

если e_1 означаетъ среднюю величину разстоянія e.

Эти разсужденія можно приложить къ конденсатору въ видѣ пластинки или въ формѣ лейденской банки. Обыкновенно тѣло B сообщаютъ съ землею: при этомъ $V_2 = 0$, и предъидущая формула будетъ:

$$Q_1 = \frac{V_1 S_1}{4\pi e_1}$$

Еслибы банка была совершенная, т. е. еслибы обѣ обкладки ея представляли сомкнутыя поверхности, то заряды на обѣихъ изъ нихъ были бы совершенно равны и противоположны.

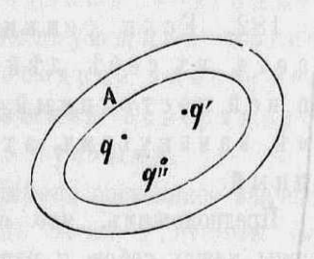
Теорема шестая.

181. Если въ системѣ электрическихъ тѣлъ, находящихся въ равновѣсіи, проводникъ заключаетъ въ себѣ различныя электрическія массы, то алгебраическая сумма количествъ электричества, находящихся внутри его и на внутренней поверхности, равна нулю.

Пусть q, q', q'', ... будутъ электрическія массы, находящіяся внутри проводника A (фиг. 49); на внутренней ограничивающей поверхности A распространенъ электрическій слой Q_1, а на внѣшней — Q_2; кромѣ того, электрическія массы могутъ существовать еще и внѣ.

Представимъ себѣ въ самомъ тѣлѣ A сомкнутую поверхность S, т. е. такую, которая лежитъ между внутреннею и внѣшнею ограничивающими поверхностями, и приложимъ къ объему, замкнутому этою поверхностью, теорему (II):

Фиг. 49.



$$\int \frac{dV}{ds} \, d\sigma = -4\pi Q$$

Такъ какъ потенціалъ V всей системы внутри тѣла A имѣетъ постоянное значеніе, то производная $\frac{dV}{ds}$ въ каждой точкѣ поверхности S равна нулю, и, слѣдовательно, $Q = 0$ или

$$(VI) \qquad Q_1 + q + q' + q'' + \ldots = 0$$

При этомъ массы q, q', ... могутъ находиться въ различныхъ точкахъ дурнаго проводника, или могутъ принадлежать также электрическимъ слоямъ, распространяющимся по поверхности электрическихъ проводниковъ, раздѣленныхъ какъ между собою, такъ и отъ внутренней ограничивающей поверхности тѣла A изолирующею средою.

Слѣдствіе. Положимъ, что не существуетъ другой электрической массы, кромѣ окруженной тѣломъ A, и что это тѣло само первоначально находилось въ нейтральномъ состояніи; тогда оно будетъ наэлектризовано посредствомъ вліянія электричества, и алгебраическая сумма $Q_1 + Q_2$ возбужденнаго свободнаго электричества на тѣлѣ равна нулю. И такъ, имѣемъ:

$$Q_2 = -Q_1 = q + q' + q'' + \ldots$$

Такимъ образомъ получается законъ Фарадея: если проводникъ окружаетъ извѣстную электрическую массу, то индуктированное въ немъ количество электричества равно индуктирующему.

Теорема седьмая.

182. Если сомкнутая поверхность не заключаетъ въ себѣ дѣйствующей массы и потенціалъ на ней постоянный, то и потенціалъ во всемъ объемѣ, замкнутомъ этою поверхностью, также постоянный.

Предположимъ, что обѣ функціи U и V въ уравненіи Грина равны между собою и равны потенціалу; тогда

$$\int V\Delta V dv = \int V\frac{dV}{ds}d\sigma - \int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dv$$

Если замѣнить ΔV его значеніемъ $-4\pi k$ и замѣтить, что

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = F^2$$

то, слѣдовательно,

$$(\gamma) \qquad \int F^2 dv = \int V\frac{dV}{ds}d\sigma + 4\pi\int kVdv$$

Такъ какъ внутри поверхности S не находится дѣйствующей массы, то во всемъ объемѣ $k=0$, и, слѣдовательно,

$$\int kV dv = 0$$

Съ другой стороны, потенціалъ на поверхности S имѣетъ постоянное значеніе V_1, а потому, по теоремѣ (II),

$$\int V\frac{dV}{ds}d\sigma = V_1\int\frac{dV}{ds}d\sigma = -4\pi V_1 Q = 0$$

И такъ, отсюда слѣдуетъ, что

$$(VII) \qquad \int F^2 dv = 0$$

Такимъ образомъ сила F равна нулю, а вслѣдствіе этого потенціалъ будетъ постоянный на всемъ протяженіи объема.

183. Слѣдствіе. Если проводникъ содержитъ пустоты, незаключающія дѣйствующихъ массъ, то и въ этомъ случаѣ все свободное электричество находится только на внѣшней поверхности тѣла, какъ еслибы оно не было пустымъ.

На поверхности пустоты потенціалъ имѣетъ постоянное значеніе V_1. Предположимъ, что въ какой нибудь точкѣ P пустоты онъ имѣетъ другое значеніе a. Проведемъ теперь линію изъ P въ какую нибудь точку внутренней поверхности; тогда потенціалъ будетъ измѣняться по этой линіи отъ a до V_1, и можно было бы найти точку M, гдѣ онъ имѣетъ велиличину b между a и V_1. Мѣсто такихъ точекъ представляло бы сомкнутую поверхность, и къ ней можно было бы примѣнить разсмотрѣнную выше теорему; тогда потенціалъ внутри этой поверхности долженъ былъ бы имѣть постоянную величину b, что̀, однако, противорѣчитъ сдѣланному положенію. Поэтому потенціалъ во всей пустотѣ имѣетъ постоянное значеніе V_1, такое же точно, какъ и въ самомъ проводникѣ, а, слѣдовательно, по теоремѣ (VI), на поверхности пустоты не существуетъ свободнаго электричества. Еслибы эта пустота была наполнена проводящимъ, но не наэлектризованнымъ тѣломъ, то чрезъ это состояніе его не измѣнилось бы.

Теорема восьмая.

184. Для системы, состоящей изъ твердыхъ электрическихъ массъ и изъ электрическихъ зарядовъ, находящихся на проводникахъ, существуетъ одно только состояніе равновѣсія.

Разсмотримъ сначала систему, состоящую только изъ изолированныхъ проводниковъ A, B, C, ..., изъ которыхъ каждый содержитъ одинаковое количество положительнаго и отрицательнаго электричества: при этомъ единственное состояніе равновѣсія будетъ нейтральное состояніе. Допустимъ существованіе другаго состоянія равно-

вѣсія, и положимъ, что V_1, V_2, V_3, . . . будутъ постоянныя значенія потенціала въ различныхъ тѣлахъ, и между ними V_1 наибольшее по абсолютной величинѣ; наконецъ, пусть a будетъ постоянная величина между V_1 и нулемъ, которая, однако, по абсолютному значенію болѣе прочихъ величинъ V_2, V_3, ... Изъ произвольно взятой точки на поверхности тѣла A проведемъ прямыя линіи въ различныхъ направленіяхъ. На линіи, не встрѣчающей другаго тѣла, потенціалъ измѣняется отъ V_1 до нуля, и можно найти точку M, гдѣ онъ имѣетъ величину a. Напротивъ того, если линія встрѣчаетъ другое тѣло, напримѣръ B, то потенціалъ измѣняется на ней отъ V_1 до V_2; точно также и въ промежуткѣ, раздѣляющемъ два тѣла, можно найти точку M, въ которой потенціалъ имѣетъ величину a. Если прямая встрѣчаетъ поверхность тѣла A въ двухъ и болѣе точкахъ, то M берется отъ послѣдней. Такимъ образомъ получимъ сомкнутую поверхность S, на которой потенціалъ имѣетъ постоянное значеніе a. Эта поверхность будетъ заключать только тѣло A, между тѣмъ какъ прочія тѣла останутся внѣ ея. Приложимъ теперь къ объему, замкнутому этою поверхностью, отношеніе (γ) въ предъидущемъ параграфѣ и замѣтимъ, что

$$\int V \frac{dV}{ds} d\sigma = a \int \frac{dV}{ds} d\sigma = -4\pi\, a Q_1$$

гдѣ Q_1 есть алгебраическая сумма всѣхъ электрическихъ массъ, окруженныхъ поверхностью S. Далѣе, такъ какъ всѣ эти массы находятся на тѣлѣ A, то

$$\int k V dv = V_1 \int k dv = V_1 Q_1$$

а потому уравненіе (γ) будетъ

$$\int F^2 dv = 4\pi\, Q_1 \,(V_1 - a)$$

Но, въ настоящемъ случаѣ $Q_1 = 0$. Отсюда заключаемъ, что F внутри поверхности S равно нулю, и, слѣдовательно, по теоремѣ (IV), тѣло A находится въ нейтральномъ состояніи.

Не обращая вниманія на присутствіе этого нейтральнаго тѣла, можно показать также, что и второе, третье тѣло и т. д. должны находиться въ нейтральномъ состояніи; слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ нейтральность есть единственное состояніе равновѣсія.

Разсмотримъ теперь любую систему, состоящую изъ твердыхъ электрическихъ массъ q, q', q'', ..., находящихся на изолаторахъ, и изъ зарядовъ Q_1, Q_2, Q_3, ... распространенныхъ по поверхности проводниковъ. Докажемъ, что и при этомъ существуетъ одно только состояніе равносѣсія.—Положимъ, что ихъ два, и пусть тогда h_1, h_2, ... будутъ плотности электрическихъ слоевъ, распространенныхъ по поверхности проводниковъ при первомъ состояніи равновѣсія; h'_1, h'_2, ... — соотвѣтствующія плотности при второмъ. Если перемѣнить знаки у всѣхъ электрическихъ массъ во второмъ состояніи, то получится новое состояніе равновѣсія $-q$, $-q'$, . . . , $-h'_1$, $-h'_2$, ... Присоединяя это состояніе къ первому, получимъ новое равновѣсіе, въ которомъ твердыя массы q и $-q$, q' и q', . . . взаимно нейтрализуются, а плотности въ различныхъ слояхъ будутъ $h_1 - h'_1$, $h_2 - h'_2$, ... При этомъ алгебраическая сумма всѣхъ электрическихъ массъ, образующихъ слой, равна нулю. Такимъ образомъ мы пришли къ особому случаю равновѣсія, который уже разсматривали, и это новое состояніе есть нейтральное; слѣдовательно $h'_1 = h_1$, $h'_2 = h_2$, ... а потому разсматриваемая система можетъ имѣть одно только состояніе равновѣсія.

Теорема девятая.

185. Если въ уравненіи Грина замѣнить U буквою V и это новое уравненіе вычесть почленно изъ стараго, то получимъ:

$$(\delta) \quad \int U \Delta V dv - \int V \Delta U dv = \int \left(U \frac{dV}{ds} - V \frac{dU}{ds} \right) d\sigma$$

Положимъ теперь, что V все-таки есть потенціалъ любой системы электрическихъ массъ, а U, напротивъ того, представляетъ обрат-

ное значеніе $\frac{1}{r}$ разстоянія между какою нибудь точкою разсматриваемаго объема и любою неподвижною точкою P. Если вмѣсто ΔV ввести его значеніе $-4\pi k$, то

$$\int U\Delta V dv = -4\pi \int \frac{kdv}{r} = -4\pi V_p'$$

гдѣ V_p' означаетъ потенціалъ всѣхъ содержащихся въ объемѣ массъ относительно точки P. Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда точка P лежитъ внѣ объема. Такъ какъ при этомъ разстояніе r не равно нулю, то получимъ тожественно, что $\Delta U = \Delta \frac{1}{r} = 0$, а уравненіе ($\delta$) сведется на

$$(IX) \quad \int \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{ds} - V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} \right) d\sigma = -4\pi V_p'$$

186. Напротивъ того, положимъ теперь, что точка P лежитъ внутри объема, ограниченнаго поверхностью S. Вокругъ точки P, какъ центра, опишемъ весьма малымъ радіусомъ r' шаръ S', при чемъ мы можемъ приложить предъидущее уравненіе (IX) къ объему, находящемуся между двумя поверхностями S и S', и интегрированіе должны распространить на обѣ поверхности. Въ части интеграла, относящейся къ поверхности S', имѣемъ: $ds = dr'$, $d\sigma = r'^2 d\omega$ и, слѣдовательно, для нея

$$\int \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{ds} - V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} \right) d\sigma = -\int \left(\frac{1}{r'} \frac{dV}{dr'} - V \frac{d\left(\frac{1}{r'}\right)}{dr'} \right) r'^2 d\omega$$

$$= -r' \int \frac{dV}{dr'} d\omega - \int V d\omega$$

Если r' приближается къ нулю, то первый членъ въ правой части также приближается къ нулю, а второй, напротивъ того,—къ величинѣ $-4\pi V_p$, при чемъ V_p означаетъ потенціалъ всѣхъ дѣйствующихъ массъ на точку P. Далѣе, потенціалъ V' массъ, находящихся между поверхностями S и S', имѣетъ предѣломъ потенціалъ всѣхъ массъ, окруженныхъ поверхностью S; поэтому уравненіе (IX) будетъ:

$$(IX)' \quad \int \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{ds} - V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} \right) d\sigma = 4\pi (V_p - V'p)$$

При этомъ интегралъ распространяется только на поверхность S.

Если эта поверхность не заключаетъ въ себѣ ни одной дѣйствующей массы, то $V'p = 0$; напротивъ того, если она окружаетъ всѣ дѣйствующія массы, то $V'p = V_p$.

187. Слѣдствіе. Положимъ, что поверхность S есть поверхность шара съ радіусомъ R, и что точка P совпадаетъ съ центромъ; тогда

$$ds = dR$$

$$\int \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{ds} - V \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} \right) d\sigma = \frac{1}{R} \int \frac{dV}{ds} d\sigma + \frac{1}{R^2} \int V d\sigma$$

Но, вслѣдствіе теоремы (II),

$$\int \frac{dV}{ds} d\sigma = -4\pi q$$

при чемъ q означаетъ дѣйствующую массу, находящуюся въ шарѣ. Слѣдовательно, уравненіе $(IX)'$ будетъ:

$$(A) \quad \int V d\sigma = 4\pi R q + 4\pi R^2 (V_p - V_p')$$

Если шаръ не содержитъ ни одной дѣйствующей массы, то $q = 0$, $V'_p = 0$, и предъидущее уравненіе сведется на

$$(a) \quad \int V d\sigma = 4\pi R^2 V_p$$

Напротивъ того, если шаръ заключаетъ всѣ дѣйствующія массы, то $V_p' = V_p$, и это уравненіе будетъ:

$$(b) \qquad \int V d\sigma = 4\pi RQ$$

если Q означаетъ сумму дѣйствующихъ массъ.

Теорема десятая.

188. Если сомкнутая поверхность заключаетъ въ себѣ всѣ дѣйствующія массы, и если потенціалъ на этой поверхности имѣетъ постоянную величину, то въ каждой внѣшней точкѣ онъ имѣетъ значеніе, лежащее между нулемъ и величиною его на этой поверхности уровня.

Предположимъ, что сомкнутая поверхность S заключаетъ въ себѣ всѣ дѣйствующія массы, и что потенціалъ на этой поверхности имѣетъ постоянное положительное значеніе a. Покажемъ сначала, что потенціалъ внѣ ея постоянно сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ. — Принявъ для потенціала во внѣшней точкѣ P отрицательное значеніе $-b$, проведемъ изъ P прямыя линіи къ точкамъ поверхности S; при этомъ потенціалъ на нихъ будетъ измѣняться отъ $-b$ до $+a$, и можно было бы найти на каждой изъ этихъ линій точку M, гдѣ потенціалъ имѣетъ данное значеніе $-b'$, лежащее между $-b$ и нулемъ. На всѣхъ прямыхъ, выходящихъ изъ точки P и продолжающихся безконечно, не встрѣчая поверхности S, потенціалъ измѣнялся бы отъ $-b$ до нуля, и на каждой изъ нихъ можно было бы найти точку такого же свойства. Мѣсто этихъ точекъ образовало бы вокругъ P сомкнутую поверхность уровня S', которая вовсе не заключала бы въ себѣ дѣйствующей массы; при этомъ, по теоремѣ (VII), потенціалъ внутри вездѣ долженъ быть постояннымъ; а это противорѣчитъ нашему положенію.

Далѣе, невозможно, чтобы потенціалъ въ какой нибудь внѣшней точкѣ P былъ нулемъ. — Опишемъ теперь изъ точки P шаровую

поверхность, которая лежитъ внѣ S и касается S; тогда, по уравненію (a) въ предъидущемъ параграфѣ, получимъ:

$$\int V d\sigma = 0$$

Такъ какъ потенціалъ V на всей поверхности шара сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, то для удовлетворенія этого уравненія необходимо, чтобы онъ въ каждой точкѣ шаровой поверхности былъ равенъ нулю, что̀ невозможно.

Покажемъ теперь, что потенціалъ въ какой нибудь внѣшней точкѣ не можетъ имѣть ни равнаго, ни большаго значенія, чѣмъ a. — Положимъ, что существуетъ одна или нѣсколько точекъ P, гдѣ потенціалъ имѣетъ наибольшее значеніе c, которое равно или болѣе a. — При этомъ, какъ прежде, опишемъ около одной изъ такихъ точекъ P шаровую поверхность, которая лежитъ внѣ S и касается S; тогда, по уравненію (a), имѣли бы:

$$\int V d\sigma = 4\pi R^2 c$$

Потенціалъ необходимо долженъ быть равенъ наибольшему значенію c на всей поверхности; а это могло бы имѣть мѣсто тогда, еслибы $c = a$. Тоже самое значеніе a потенціалъ имѣлъ бы и въ каждомъ мѣстѣ внутри шара. Опишемъ снова изъ какой нибудь точки этого перваго шара второй шаръ, который также лежитъ внѣ S и касается S; при этомъ потенціалъ и внутри втораго шара долженъ имѣть постоянное значеніе a. — Продолжая такимъ же образомъ, пришли бы къ условію, что потенціалъ во всемъ безконечномъ пространствѣ, внѣ поверхности S, долженъ имѣть постоянное значеніе a, что̀ не можетъ быть, потому что онъ въ бозконечности равенъ нулю; слѣдовательно, внѣ поверхности S потенціалъ имѣетъ величину, лежащую между a и нулемъ.

Если переходить внаружу отъ какой нибудь точки M поверхности S, то потенціалъ будетъ постепенно уменьшаться, и мы придемъ въ точку M', вблизи M, гдѣ онъ имѣетъ данную величину a', меньшую чѣмъ a. Мѣсто точекъ M' есть новая поверхность

уровня S', окружающая первую. Продолжая такимъ же образомъ, можно представить рядъ подобныхъ поверхностей уровня, изъ которыхъ послѣдующія постоянно будутъ окружать предъидущія и на которыхъ потенціалъ будетъ имѣть все меньшія и меньшія значенія.

Особенно важный случай представляется тогда, когда потенціалъ на поверхности S равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ, какъ выходитъ изъ начала приведеннаго разсужденія, потенціалъ и во всемъ внѣшнемъ пространствѣ также равенъ нулю.

Теорема одиннадцатая.

189. Если въ системѣ, въ которой электричество находится въ равновѣсіи, проводникъ заключаетъ различныя электрическія массы, то электрическій слой, распространяющійся на внутренней поверхности проводника, вмѣстѣ съ лежащими внутри электрическими массами, образуетъ особую систему, которая сама съ собою въ равновѣсіи и не производитъ ко внѣ никакого дѣйствія.

Возвратимся къ фигурѣ въ n^0 181 и приложимъ къ воображаемой сомкнутой поверхности S внутри проводника A теорему (IX). Потенціалъ V всей системы внутри проводника A имѣетъ постоянное значеніе V_1, и, слѣдовательно, производная $\frac{dV}{ds}$ на поверхности S равна нулю; поэтому лѣвая часть уравненій (IX) и $(IX)'$ сведется на

$$-\int V\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}d\sigma = -V_1\int\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}d\sigma$$

Теперь величину $\frac{1}{r}$ можно разсматривать какъ потенціалъ единичной массы, находящейся въ точкѣ P, а по отношенію (II) интегралъ

$$\int\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}d\sigma$$

равенъ нулю или — 4π, смотря потому, лежитъ ли точка P внѣ или внутри поверхности S. Въ первомъ случаѣ уравненіе (IX) сведется на $V'_p = 0$, а во второмъ—уравненіе $(IX)'$ приведется къ $V'_p = V_p - V_1$. Но V'_p есть потенціалъ въ точкѣ P электрическихъ массъ Q_1, q, q', ..., окруженныхъ поверхностью S. Такъ какъ поверхность S можно провести какъ угодно близко къ внутренней поверхности проводника A, то отсюда заключаемъ, что потенціалъ системы, составленной изъ этихъ массъ, алгебраическая сумма которыхъ равна нулю (n^0 181), внѣ постоянно равенъ нулю, а внутри — полному потенціалу, уменьшенному постоянною величиною V_1.

Изъ этого выходитъ, что особая система Q_1, q, q', . . . сама по себѣ въ равновѣсіи, и что потенціалъ ея въ проводникѣ A имѣетъ постоянное значеніе — нуль. Далѣе, если q, q', ... — электрическіе заряды, находящіеся внутри различныхъ проводниковъ, то, — такъ какъ полный потенціалъ V въ каждомъ изъ нихъ имѣетъ постоянное значеніе, — потенціалъ V' особой системы имѣетъ также постоянную величину. Это особое равновѣсіе будетъ такое, которое наступило бы, еслибы тѣло A было приведено въ сообщеніе съ землею посредствомъ проводника. Такъ какъ внѣ потенціалъ особой системы равенъ нулю, то при этомъ она не произведетъ никакого дѣйствія и будетъ какъ бы нейтральнымъ тѣломъ. Такимъ свойствомъ обладаетъ совершенная лейденская банка.

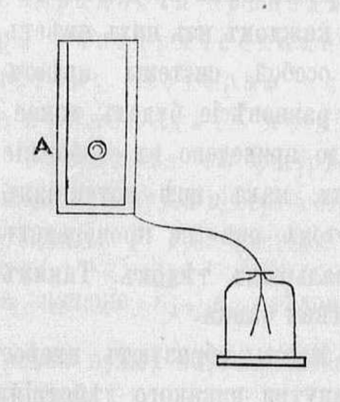
Очевидно, что прочія электрическія массы образуютъ второе состояніе равновѣсія и не произведутъ внутри никакого дѣйствія, потому что потенціалъ $V - V'$ этой второй особой системы имѣетъ внутри вездѣ постоянное и равное V_1 значеніе. Это второе состояніе равновѣсія будетъ такое, которое наступило бы, еслибы тѣло A не было пустымъ; поэтому, общее равновѣсіе состоитъ изъ совокупности двухъ особыхъ равновѣсій.

Если, напримѣръ, не существуетъ другихъ электрическихъ массъ, кромѣ тѣхъ, которыя заключаются въ тѣлѣ A и которыя находятся на немъ, то электрическій слой Q_2 на внѣшней поверхности самъ по себѣ находится въ равновѣсіи и, при этомъ, представляетъ слой уровня.

190. Слѣдствіе. Предъидущую теорему можно еще болѣе обобщить. Положимъ, что опять-таки цѣлый рядъ системъ, сходныхъ съ A, окружены проводникомъ B. Электрическія массы, заключающіяся въ тѣлахъ $A, A', \ldots$, находятся въ особомъ равновѣсіи, не дѣйствуя ко внѣ, а потому ими можно совершенно пренебречь и ограничиться только разсматриваніемъ слоевъ Q_2, Q'_2,....., распространяющихся на внѣшнихъ поверхностяхъ этихъ тѣлъ, точно такъ, какъ еслибы они были массивными, а не пустыми. Эти электрическія массы, взятыя вмѣстѣ съ слоемъ, роспространяющимся на внутренней поверхности окружающаго проводника B, образуютъ новую особую систему равновѣсія безъ дѣйствія ко внѣ, а также и безъ дѣйствія внутри тѣлъ $A, A', \ldots$

Если не существуетъ другихъ электрическихъ массъ, кромѣ тѣхъ, которыя заключаются въ проводникѣ и находятся на немъ, то слой, распространяющійся на внѣшней поверхности тѣла B, самъ по себѣ находится въ равновѣсіи, т. е. онъ — слой уровня.

Фиг. 50.

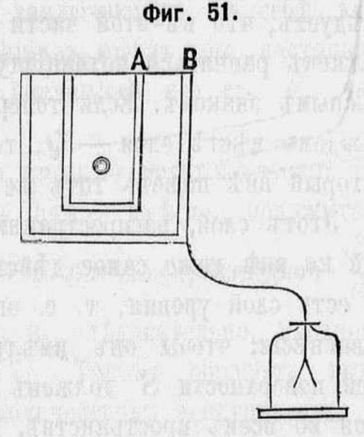


При этомъ полезно замѣтить, что слой уровня постоянно образуется изъ одного только рода электричества. Такъ какъ внѣшняя поверхность слоя содержитъ всѣ электрическія массы, то, по теоремѣ десятой, потенціалъ уменьшается по своей абсолютной величинѣ, если переходитъ отъ поверхности ко внѣ; поэтому $\frac{dV}{ds}$, а также плотность h во всѣхъ точкахъ поверхности имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ.

191. Опыты Фарадея подтверждаютъ эти теоретическіе выводы. Фарадей употреблялъ изолированный и проводящій электричество цилиндръ (фиг. 50), высота котораго значительно превосходила его діаметръ, и который онъ приводилъ въ сообщеніе съ весьма чувствительнымъ электроскопомъ. Потомъ онъ опускалъ въ этотъ цилиндръ наэлектризованный шаръ — и соломенки электрометра раздвигались. Сначала это расхожденіе увеличивалось; оно достигало почти постоянной величины, когда шаръ опускался до опредѣленнаго уровня, а потомъ дѣлалось независимымъ отъ положенія его въ цилиндрѣ; при чемъ оно оставалось однимъ и тѣмъ же даже и тогда, когда шаръ прикасался къ стѣнкѣ цилиндра. Ясно, что если конусъ, построенный отъ шара къ отверстію, достаточно малъ, то цилиндръ представляетъ какъ бы сомкнутую оболочку, а слой уровня, образующійся на внѣшней поверхности, имѣетъ постоянный зарядъ $+Q$, равный заряду шара.

Фарадей произвелъ этотъ опытъ еще болѣе совершеннымъ образомъ, употребивъ два вполнѣ изолированные концентрическіе цилиндра A и B (фиг. 51), изъ которыхъ послѣдній былъ приведенъ въ сообщеніе съ электроскопомъ. Если въ цилиндръ A ввести шаръ, заряженный электрическою массою $+Q$, то слой уровня, образующійся на внѣшней поверхности цилиндра B, будетъ тотъ же самый, какъ еслибы цилиндра A совершенно не существовало, а расхожденіе соломенокъ будетъ такое же, какъ и въ первомъ опытѣ. Если цилиндръ A привести въ сообщеніе съ землею, то слой, распространяющійся на внѣшней его поверхности, исчезнетъ, и цилиндръ B перестанетъ быть наэлектризованнымъ, — соломенки же сойдутся.

Фиг. 51.



Теорема двѣнадцатая.

192. **Дѣйствіе, производимое данными электрическими массами внѣ сомкнутой окружающей ихъ поверхности, такое же, какъ и дѣйствіе слоя равной массы, распространяющагося на этой поверхности по извѣстному закону.**

Пусть $q, q', \ldots$ будутъ данныя электрическія массы, сум-

му которыхъ означимъ черезъ Q, и которыя представимъ себѣ неподвижными, какъ еслибы онѣ находились на изоляторахъ, и пусть ихъ окружаетъ какого нибудь вида поверхность S. Представимъ себѣ эту систему окруженною проводникомъ, внутренній предѣлъ котораго совпадаетъ съ поверхностью S, а внѣшній образуется любою поверхностью S'. Подъ вліяніемъ данныхъ электрическихъ массъ на поверхности S образуется электрическій слой $-Q$, а на S' — слой $+Q$. Но, по предъидущей теоремѣ, потенціалъ слоя $-Q$ и массъ $q, q', \ldots$ внѣ поверхности S равенъ нулю. Отсюда слѣдуетъ, что въ этой части пространства потенціалъ слоя $-Q$ долженъ равняться потенціалу данныхъ массъ, но съ противоположнымъ знакомъ. Если теперь перемѣнимъ знакъ у плотности въ каждомъ мѣстѣ слоя $-Q$, то получимъ на поверхности S слой Q, который внѣ имѣетъ тотъ же потенціалъ, какъ и данныя массы.

Этотъ слой, распространяющійся по поверхности S и производящій ко внѣ тоже самое дѣйствіе, какъ и данныя массы, вообще не есть слой уровня, т. е. онъ не находится самъ по себѣ въ равновѣсіи; чтобы онъ имѣлъ это свойство, — его потенціалъ на всей поверхности S долженъ быть постояннымъ. Но потенціалъ слоя во всемъ пространствѣ, лежащемъ внѣ S, а, слѣдовательно, также и на самой поверхности S, равенъ потенціалу данныхъ массъ; поэтому необходимо, чтобы поверхность S относительно данныхъ массъ была слоемъ уровня.

Если алгебраическая сумма данныхъ электрическихъ массъ равна нулю, то эквивалентный слой на поверхности S будетъ состоять изъ двухъ равныхъ количествъ положительнаго и отрицательнаго электричествъ, при чемъ положительное электричество займетъ одну часть поверхности, а отрицательное — другую.

Электризованіе чрезъ вліяніе.

193. Разсмотримъ сначала проводникъ A, сообщенный съ землею и подверженный дѣйствію твердой электрической массы q, которая находится во внѣшней точкѣ O. — Подъ вліяніемъ электрической массы q, на тѣлѣ образуется такого рода электрическій слой, что потенціалъ его V и массы q внутри тѣла A равенъ нулю. По сосѣдству съ точкою O часть $\frac{q}{r}$ потенціала опредѣляетъ его знакъ, потому что она преобладаетъ надъ другою частью, происходящею отъ слоя. Легко видѣть, что вообще потенціалъ долженъ имѣть одинъ и тотъ же знакъ во всемъ пространствѣ, потому что еслибы онъ имѣлъ въ точкѣ P противоположный знакъ тому, который вблизи точки O, то вокругъ P можно было бы построить сомкнутую поверхность, не заключающую въ себѣ электрической массы, и на которой потенціалъ имѣлъ бы постоянную величину, лежащую между нулемъ и значеніемъ его въ P, чего, однако, не можетъ быть (n^0 182).

Предположимъ, что электрическая масса q положительная; тогда потенціалъ въ тѣлѣ A — нуль, а внѣ — имѣетъ положительную величину. При этомъ на поверхности значеніе производной $\frac{dV}{dn}$, взятой ко внѣ, также положительное, а, слѣдовательно, плотность h на слоѣ — отрицательная (n^0 177). Такимъ образомъ выходитъ, что проводникъ A заряженъ количествомъ электричества q', имѣющимъ съ q противоположный знакъ.

Представимъ себѣ шаръ, одновременно заключающій точку O и тѣло A; тогда, по уравненію (b) въ n^0 187, получимъ:

$$4\pi R(q+q') = \int V d\sigma$$

Такъ какъ потенціалъ имѣетъ положительное значеніе, то это же самое относится и къ интегралу, а потому $q+q' > 0$. Слѣдовательно, въ проводникѣ, находящемся въ сообщеніи съ землею, количество индуктированнаго электричества равно индуктирующему или менѣе его. Оно равно, какъ видѣли въ n^0 181, когда проводникъ заключаетъ въ себѣ индуктирующую массу.

194. Опредѣлимъ теперь отношеніе $\frac{q'}{q}$ между индуктированнымъ и индуктирующимъ количествами электричества. — Съ этою

цѣлью разсмотримъ объемъ, съ одной стороны ограниченный поверхностью S, безконечно близко лежащею къ тѣлу A и совершенно окружающею его, и маленькою поверхностью шара, описанною изъ точки O, какъ центра, радіусомъ r, а съ другой стороны, ко внѣ, замкнутый поверхностью шара, описаннаго изъ какой нибудь точки P весьма большимъ радіусомъ R. Къ этому объему приложимъ уравненіе (δ) въ n^0 185:

$$\int (U \Delta V - V \Delta U)\, dv = \int \left(U \frac{dV}{ds} - V \frac{dU}{ds} \right) d\sigma$$

Въ этомъ уравненіи V должно означать вышесказанный потенціалъ, а U — потенціалъ слоя уровня, который образовался бы на поверхности A, еслибы тѣло было изолировано и наэлектризовано, не будучи подвержено дѣйствію внѣ лежащей электрической массы. Интегралъ на лѣвой сторонѣ относится къ объему, въ которомъ совершенно не заключается электрической массы, и, слѣдовательно, въ каждой точкѣ этого объема $\Delta V = 0$ и $\Delta U = 0$, а потому интегралъ тожественно равенъ нулю. На правой же сторонѣ интегралъ распространяется на три поверхности, ограничивающія разсматриваемый объемъ. На большомъ шарѣ оба потенціала имѣютъ весьма малое значеніе и могутъ быть представлены посредствомъ сходящихся рядовъ вида:

$$U = \frac{a}{R} + \frac{b}{R^2} + \frac{c}{R^3} + \ldots$$

$$V = \frac{a'}{R} + \frac{b'}{R^2} + \frac{c'}{R^3} + \ldots$$

Отсюда выходитъ, что

$$U \frac{dV}{dR} - V \frac{dU}{dR} = -\frac{ab' - ba'}{R^4} + \ldots$$

Такъ какъ, съ другой стороны, $d\sigma = R^2\, d\omega$, то ясно, что относящійся къ большому шару интегралъ, при безконечномъ возрастаніи R, приближается къ предѣльному значенію—нуль. Далѣе, такъ какъ V въ тѣлѣ A равно нулю, а U имѣетъ постоянное значеніе U_1, и такъ какъ элементъ нормали берется извнутри внаружу, то для интеграла, относящагося къ поверхности S, выходитъ, что

$$-U_1 \int \frac{dV}{ds}\, d\sigma = 4\pi q' U_1$$

Означимъ чрезъ U_0 значеніе U въ точкѣ O и положимъ, что

$$V = \frac{q}{r} + V'$$

гдѣ V' означаетъ потенціалъ индуктированнаго слоя. Если введемъ $-dr$ и $r^2 d\omega$ вмѣсто ds и $d\sigma$, то легко увидимъ, что интегралъ, относящійся къ малому шару, будетъ имѣть предѣломъ величину $4\pi q U_0$.

Поэтому уравненіе (δ) сведется на

$$0 = 4\pi (q' U_1 + q U_0)$$

Откуда выходитъ, что

$$\frac{q'}{q} = -\frac{U_0}{U_1}$$

Слѣдовательно, мы нашли, что количество электричества, которое индуктируется посредствомъ данной электрической массы на тѣлѣ A, находящемся въ сообщеніи съ землею, остается тѣмъ же самымъ, если эта масса передвигается по поверхности уровня къ изолированному тѣлу A. При этомъ индуктированная масса тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе поверхность уровня.

195. Еслибы нѣсколько твердыхъ электрическихъ массъ дѣйствовали на тѣло A, находящееся въ сообщеніи съ землею, то опредѣлились бы слои, индуктированные каждою отдѣльною массою, и эти слои лежали бы одинъ на другомъ.

Еслибы тѣло A было изолировано и первоначально находилось въ нейтральномъ состояніи, то на слоѣ Q', индуктированномъ данными электрическими массами и происшедшемъ при-

соединеніи тѣла A съ землею, лежалъ бы слой уровня — Q', который образовался бы на поверхности, еслибы тѣло было изолировано и не подвергалось дѣйствію какой нибудь посторонней электрической массы.

Наконецъ, еслибы тѣло было изолировано и заряжено первоначально даннымъ количествомъ электричества Q_1, то на индуктированномъ зарядѣ Q' лежалъ бы слой уровня $Q_1 - Q'$. Легко привести примѣры, въ которыхъ имѣетъ мѣсто такого рода равновѣсіе. Пусть V будетъ потенціалъ ряда данныхъ твердыхъ массъ $q, q_1, \ldots q', q'_1, \ldots$; S — поверхность уровня, которая окружаетъ часть ихъ, напримѣръ $q', q'_1, \ldots$. При этомъ массы $q', q'_1, \ldots$ можно замѣнить равнымъ имъ по массѣ слоемъ, распространеннымъ по поверхности S (n^0 192). Если V' есть потенціалъ массъ $q, q_1, \ldots$, V'' — потенціалъ массъ $q', q'_1, \ldots$, то потенціалъ слоя и массъ $q, q_1, \ldots$ внѣ S равенъ $V' + V'' = V$. На поверхности S онъ постоянный, и, слѣдовательно, этотъ слой находится въ равновѣсіи подъ вліяніемъ массъ $q, q_1, \ldots$.

196. Разсмотримъ теперь взаимное вліяніе двухъ изолированныхъ проводниковъ A и B, которые первоначально были заряжены количествами электричества Q_1 и Q_2. — Этотъ общій случай, по методу Мурфи, можно свести на болѣе простой. Пусть q_1 будетъ слой уровня, распространенный по поверхности A и производящій внутри ея потенціалъ 1. Представимъ себѣ этотъ слой твердымъ, а B — сообщеннымъ съ землею; тогда онъ будетъ индуктировать на B слой — q_2. Снова представимъ себѣ слой — q_2 твердымъ, а A — въ сообщеніи съ землею; тогда онъ будетъ индуктировать на A слой q_3. Представимъ себѣ и слой q_3 твердымъ; — онъ будетъ индуктировать на находящемся въ сообщеніи съ землею B слой — q_4; такимъ образомъ взаимная индукція будетъ продолжаться до безконечности. Если мы наложимъ всѣ эти различные слои одинъ на другой, то на A образуется слой

$$Q'_1 = q_1 + q_3 + q_5 + \ldots$$

а на B —

$$-Q'_2 = -q_2 - q_4 - q_6 - \ldots$$

Легко видѣть, что оба слоя Q'_1 и — Q'_2, взятые вмѣстѣ, имѣютъ потенціалъ, который на A равенъ 1, а на B — нулю, и, слѣдовательно, эти слои находятся въ равновѣсіи подъ вліяніемъ своего взаимнодѣйствія.

Такимъ же образомъ, пусть q'_1 будетъ слой уровня, распространенный на B и производящій въ немъ потенціалъ 1. Представимъ себѣ этотъ слой твердымъ, а A — въ сообщеніи съ землею; тогда онъ будетъ индуктировать на A слой — q'_2, а этотъ, будучи принятъ твердымъ, индуктируетъ на находящемся въ сообщеніи съ землею B слой q'_3, и такъ до безконечности. Оба слоя:

$$-Q''_2 = -q'_2 - q'_4 - \ldots$$

$$Q''_1 = q'_1 + q'_3 + \ldots$$

распространенные на A и B, взятые вмѣстѣ, имѣютъ потенціалъ, который равенъ 1 на B и нулю на A, и снова образуютъ равновѣсіе.

Легко видѣть, что если въ каждой точкѣ перваго состоянія равновѣсія умножить плотность на V_1, въ каждой точкѣ втораго состоянія умножить ее на V_2, то величины V_1 и V_2 должны удовлетворять двумъ уравненіямъ:

$$V_1 Q'_1 - V_2 Q''_2 = Q_1$$

$$-V_1 Q'_2 + V_2 Q''_1 = Q_2$$

Взявъ въ совокупности эти два новыя состоянія равновѣсія, получимъ равновѣсіе между обоими данными количествами электричества Q_1 и Q_2, распространенными на A и B. При этомъ общій потенціалъ имѣетъ постоянныя значенія: V_1 на A и V_2 на B. Еслибы были даны величины V_1 и V_2 потенціала на A и B, то этими же самыми уравненіями опредѣлились бы слои Q_1 и Q_2.

Какъ и прежде, легко найти примѣры, въ которыхъ имѣетъ мѣсто этотъ новый родъ равновѣсія. — Пусть V будетъ потенціалъ данныхъ твердыхъ массъ, S и S' — двѣ поверхности уровня, изъ которыхъ первая заключаетъ массы $q, q_1, \ldots$, а вторая —

остальныя массы q', q'_1, ... Массы q, q_1, ... можно замѣнить равнымъ имъ по массѣ слоемъ, распространеннымъ по поверхности S; а также и массы q', q'_1, ... — равнымъ имъ по массѣ слоемъ на S'. Общій потенціалъ этихъ двухъ слоевъ внѣ равенъ $V' + V'' = V$. Онъ имѣетъ одну постоянную величину на S, а другую постоянную же величину на S'; слѣдовательно, оба слоя находятся въ равновѣсіи подъ вліяніемъ своего взаимнодѣйствія.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Работа электрическихъ силъ.

Работа электрическихъ силъ. — Электрическая энергія. — Разряжаніе лейденской банки. — Разряжаніе батареи. — Работа магнитныхъ силъ.

197. Электрическія машины производятъ равныя количества положительнаго и отрицательнаго электричествъ. Если тѣла, наэлектризованныя электрическою машиною, — хорошіе проводники и если они приведены между собою въ сообщеніе, то все свободное электричество исчезаетъ, и система приходитъ въ нейтральное состояніе. Если отъ какой нибудь причины происходитъ перемѣщеніе электрической жидкости, или же движутся сами наэлектризованныя тѣла, то такое измѣненіе въ состояніи системы постоянно сопровождается работою электрическихъ силъ. Означимъ чрезъ dq и dq' двѣ безконечно малыя электрическія массы, чрезъ r — ихъ взаимное разстояніе; тогда элементарная работа электрическихъ силъ выразится посредствомъ

$$dL = \sum \frac{dq\,dq'}{r^2}\,dr = -d \sum \frac{dq\,dq'}{r}$$

При этомъ знакъ суммы распространяется на всѣ сочетанія электрическихъ массъ по двѣ. Положимъ, что

$$W = \sum \frac{dq\,dq'}{r}$$

тогда

$$dL = -dW$$

Поэтому, если система переходитъ изъ состоянія 1 въ состояніе 2, то электрическая работа будетъ

$$L = W_1 - W_2$$

Электрическая энергія.

198. Значеніе функціи W при любомъ состояніи системы есть работа, которую произвели бы электрическія силы, еслибы система пришла въ нейтральное состояніе, потому что въ этомъ случаѣ было бы $W_2 = 0$ и, слѣдовательно, $L = W_1$. Такъ какъ система сама собою приходитъ въ нейтральное состояніе, когда установлено сообщеніе, то необходимо заключить, что величина W постоянно имѣетъ положительное значеніе. По аналогіи, мы назовемъ ее потенціальною энергіею электрической системы или просто электрическою энергіею.

Обратно, чтобы наэлектризовать систему посредствомъ движенія электрической машины, необходимо израсходовать количество механической работы, равное потенціальной энергіи, которую хотятъ сообщить ей. Работа электрическихъ силъ при какомъ-нибудь измѣненіи состоянія системы равна вообще измѣненію, испытываемому потенціальною энергіею при переходѣ изъ одного состоянія въ другое.

Электрическая энергія представляетъ новый родъ энергіи. Если зарядить электрическую батарею, то извѣстное количество работы или механической энергіи превращается въ равное количество электрической энергіи, и обратно: при разряжаніи батареи извѣстное количество электрической энергіи превращается въ равное количество механической или тепловой энергіи.

199. Потенціальную энергію W системы электрическихъ массъ можно выразить съ помощью функціи V, которую мы назвали потенціаломъ системы. Сумма

$$W = \sum \frac{dq\, dq'}{r}$$

заключаетъ въ себѣ всѣ сочетанія элементарныхъ массъ по двѣ. Разсмотримъ сначала сочетанія опредѣленной электрической массы dq съ каждою изъ прочихъ массъ; при этомъ мы получимъ частную сумму:

$$dq \sum \frac{dq'}{r}$$

Но $\sum \frac{dq'}{r}$ есть значеніе потенціала V всей системы въ томъ мѣстѣ, гдѣ лежитъ масса dq; поэтому частная сумма равна Vdq. Такимъ же образомъ сочетанія другой опредѣленной массы dq' со всѣми прочими дадутъ частную сумму $V'dq'$, гдѣ V' означаетъ потенціалъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ находится масса dq'. И такъ, получимъ: $Vdq + V'dq' + \ldots$ или $\sum Vdq$. Такимъ образомъ каждое сочетаніе повторяется дважды: напримѣръ, сочетаніе массъ dq и dq' первый разъ встрѣчается въ частной суммѣ Vdq, а второй — въ частной суммѣ $V'dq'$; слѣдовательно нужно взять половину результата, и потому получится отношеніе [1]):

$$(1) \qquad W = \frac{1}{2} \sum Vdq$$

200. Разсмотримъ систему проводниковъ $A, B, C, \ldots$, на которыхъ пусть будутъ распространены электрическіе заряды $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ Пусть равновѣсіе электричества уже наступило, такъ что потенціалъ въ тѣлѣ A имѣетъ постоянное значеніе V_1, въ тѣлѣ же B — другое постоянное значеніе V_2 и т. д. Члены, относящіеся къ различнымъ электрическимъ массамъ, распространеннымъ на тѣлѣ A, представляютъ въ суммѣ $\sum Vdq$ частную сумму $V_1 \sum dq$ или $V_1 Q_1$; такимъ же образомъ члены, от-

---

[1]) Величину $\sum Vdq$ Беръ называетъ потенціаломъ электрическихъ массъ относительно ихъ самихъ. То, что я называю здѣсь потенціальною энергіею электрическихъ массъ, есть не что иное, какъ половина этого потенціала. Бріо.

тогда

$$dL = -dW$$

Поэтому, если система переходитъ изъ состоянія 1 въ состояніе 2, то электрическая работа будетъ

$$L = W_1 - W_2$$

Электрическая энергія.

198. Значеніе функціи W при любомъ состояніи системы есть работа, которую произвели бы электрическія силы, еслибы система пришла въ нейтральное состояніе, потому что въ этомъ случаѣ было бы $W_2 = 0$ и, слѣдовательно, $L = W_1$. Такъ какъ система сама собою приходитъ въ нейтральное состояніе, когда установлено сообщеніе, то необходимо заключить, что величина W постоянно имѣетъ положительное значеніе. По аналогіи, мы назовемъ ее потенціальною энергіею электрической системы или просто электрическою энергіею.

Обратно, чтобы наэлектризовать систему посредствомъ движенія электрической машины, необходимо израсходовать количество механической работы, равное потенціальной энергіи, которую хотятъ сообщить ей. Работа электрическихъ силъ при какомъ-нибудь измѣненіи состоянія системы равна вообще измѣненію, испытываемому потенціальною энергіею при переходѣ изъ одного состоянія въ другое.

Электрическая энергія представляетъ новый родъ энергіи. Если зарядить электрическую батарею, то извѣстное количество работы или механической энергіи превращается въ равное количество электрической энергіи, и обратно: при разряжаніи батареи извѣстное количество электрической энергіи превращается въ равное количество механической или тепловой энергіи.

199. Потенціальную энергію W системы электрическихъ массъ можно выразить съ помощью функціи V, которую мы назвали потенціаломъ системы. Сумма

$$W = \sum \frac{dq\,dq'}{r}$$

заключаетъ въ себѣ всѣ сочетанія элементарныхъ массъ по двѣ.— Разсмотримъ сначала сочетанія опредѣленной электрической массы dq съ каждою изъ прочихъ массъ; при этомъ мы получимъ частную сумму:

$$dq \sum \frac{dq'}{r}$$

Но $\sum \frac{dq'}{r}$ есть значеніе потенціала V всей системы въ томъ мѣстѣ, гдѣ лежитъ масса dq; поэтому частная сумма равна Vdq. Такимъ же образомъ сочетанія другой опредѣленной массы dq' со всѣми прочими дадутъ частную сумму $V'dq'$, гдѣ V' означаетъ потенціалъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ находится масса dq'. И такъ, получимъ: $Vdq + V'dq' + \ldots$ или $\sum Vdq$. Такимъ образомъ каждое сочетаніе повторяется дважды: напримѣръ, сочетаніе массъ dq и dq' первый разъ встрѣчается въ частной суммѣ Vdq, а второй — въ частной суммѣ $V'dq'$; слѣдовательно нужно взять половину результата, и потому получится отношеніе [1]):

$$(1) \qquad W = \frac{1}{2} \sum Vdq$$

200. Разсмотримъ систему проводниковъ $A, B, C, \ldots$, на которыхъ пусть будутъ распространены электрическіе заряды $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ Пусть равновѣсіе электричества уже наступило, такъ что потенціалъ въ тѣлѣ A имѣетъ постоянное значеніе V_1, въ тѣлѣ же B — другое постоянное значеніе V_2 и т. д. Члены, относящіеся къ различнымъ электрическимъ массамъ, распространеннымъ на тѣлѣ A, представляютъ въ суммѣ $\sum Vdq$ частную сумму $V_1 \sum dq$ или $V_1 Q_1$; такимъ же образомъ члены, от-

---

[1]) Величину $\sum Vdq$ Беръ называетъ потенціаломъ электрическихъ массъ относительно ихъ самихъ. То, что я называю здѣсь потенціальною энергіею электрическихъ массъ, есть не что иное, какъ половина этого потенціала. Бріо.

носящіеся къ электрическимъ массамъ, распространеннымъ на тѣлѣ B, имѣютъ частною суммою $V_2 Q_2$ и т. д. Поэтому отношеніе (1) будетъ:

$$(2) \qquad W = \frac{1}{2}(V_1 Q_1 + V_2 Q_2 + \ldots.)$$

Далѣе, легко видѣть, что если при заряжаніи системы одно изъ тѣлъ совершенно изолировано и, слѣдовательно, становится наэлектризованнымъ только чрезъ вліяніе, то это тѣло содержитъ тогда одинаковыя количества положительнаго и отрицательнаго электричествъ; поэтому его зарядъ Q, а также и соотвѣтствующій ему членъ энергіи равны нулю.

Если тѣло находится въ сообщеніи съ землею, то земля и это тѣло, вмѣстѣ взятыя, могутъ быть разсматриваемы какъ одно тѣло системы. Вслѣдствіе большой величины земнаго шара, потенціалъ въ этомъ тѣлѣ равенъ нулю. Такъ какъ произведенное машиною свободное электричество имѣетъ только конечное значеніе, то и соотвѣтствующій членъ въ выраженіи энергіи также равенъ нулю; поэтому, тѣ тѣла, которыя наэлектризованы чрезъ вліяніе, и тѣ, которыя находятся въ сообщеніи съ землею, не дадутъ членовъ въ выраженіи для потенціальной энергіи системы.

Ясно, что расходъ работы, необходимый для сообщенія тѣлу даннаго электрическаго заряда, будетъ minimum, когда тѣло совершенный проводникъ; потому что еслибы мы измѣнили распредѣленіе электричества, введя внутреннія сопротивленія, какъ они существуютъ въ несовершенныхъ проводникахъ, и заставили бы эти сопротивленія мало по малу уменьшаться, то жидкость пришла бы въ первоначальное распредѣленіе и, преодолѣвъ препятствія, произвела бы положительную работу.

Разряжаніе лейденской банки.

201. Разсмотримъ лейденскую банку съ совершенными обкладками. — Приведемъ внутреннюю обкладку въ сообщеніе съ источникомъ электричества, имѣющимъ потенціалъ V_1, а внѣшнюю — въ

сообщеніе съ землею. Когда лейденская банка будетъ вполнѣ заряжена, то внутренняя обкладка достигнетъ того же самаго потенціала V_1 и зарядится количествомъ электричества $+Q_1$. На внѣшней оболочкѣ возбудится зарядъ равный $-Q_1$ противоположнаго электричества, а потенціалъ на ней V_2 будетъ равенъ нулю. При этомъ банка будетъ находиться въ особомъ состояніи равновѣсія, которое мы уже разсматривали въ n^0 189. Ея потенціалъ внѣ будетъ равенъ нулю; вслѣдствіе чего, она не произведетъ никакого дѣйствія на окружающія тѣла и будетъ относиться къ нимъ какъ нейтральное тѣло. Однако же она заключаетъ въ себѣ энергію

$$W = \frac{1}{2} V_1 Q_1 .$$

Прежде мы нашли (n^0 180), что

$$Q_1 = \frac{V_1 S_1}{4\pi e_1}$$

Если λ означаетъ отношеніе $\frac{4\pi e_1}{S_1}$, которое постоянно для каждой данной банки, то получимъ:

$$V_1 = \lambda Q_1$$

и потому

$$W = \frac{1}{2} \lambda Q^2$$

И такъ, потенціальная энергія лейденской банки пропорціональна квадрату заряжанія.

Эта энергія проявляется тогда, когда обѣ обкладки соединены между собою посредствомъ разрядника: при этомъ банка совершенно разряжается и производитъ количество работы $\frac{1}{2} \lambda Q_1{}^2$, которая обнаруживается искрою и нагрѣваніемъ соединительной проволоки.

Одна часть внутренней энергіи расходуется на преодолѣніе сопротивленія воздуха, т. е. на произведеніе искры, а другая — переходитъ въ теплоту.

Если соединительная проволока толста и коротка, то искра бываетъ большая, а нагрѣваніе въ кондукторѣ слабое; напротивъ того, если соединительная проволока длинна и тонка, то искра бываетъ малая, но проволока нагрѣвается сильно.

Рядъ опытовъ подтверждаетъ результаты этой теоріи. Риссъ [1]) помѣщалъ между шариками или остріями разрядника слюдяной листокъ или карту, которую искра должна была пробить на своемъ пути, и показалъ, что при этомъ происходитъ меньшее нагрѣваніе проволоки. Сопротивленіе, которое нужно было преодолѣть въ этомъ случаѣ, было больше, а потому искра и расходовала бо́льшую часть энергіи.

Если соединить обѣ обкладки посредствомъ очень длинной и тонкой проволоки, то искра будетъ весьма мала, а соотвѣтствующею ей работою можно пренебречь. При такихъ условіяхъ, еще до установленія теоріи, Риссъ нашелъ, что если сообщить одной и той же банкѣ различные заряды, то количества теплоты, производимыя ею при разряжаніи, пропорціональны квадрату заряжаній.

Разряжаніе батареи.

202. Разсмотримъ батарею, состоящую изъ n совершенно равныхъ банокъ. Если зарядимъ ихъ по одиночкѣ однимъ и тѣмъ же источникомъ, то каждая изъ нихъ пріобрѣтетъ зарядъ q_1. Если V_1 будетъ потенціалъ въ источникѣ, то получимъ:

$$V_1 = \lambda q_1$$

Если соединить всѣ банки, то все-таки будетъ существовать равновѣсіе, потому что ни одна изъ нихъ не произведетъ дѣйствія на прочія, и потому что потенціалъ на внутреннихъ обкладкахъ у всѣхъ банокъ одинъ и тотъ же. Полный зарядъ — такой же, какъ еслибы батарея была прямо приведена въ сообщеніе съ источникомъ; поэтому, потенціальная энергія опредѣлится посредствомъ

[1]) Riess, Pogg. Ann. Bd. 43. S. 82.

формулы:

$$W = \frac{1}{2}\, n\, V_1\, q_1 = \frac{1}{2}\, V_1\, Q_1$$

гдѣ Q_1 означаетъ весь зарядъ батареи.

Такимъ образомъ электрическая батарея изъ n равныхъ банокъ эквивалентна одной банкѣ такой же толщины, но поверхность которой въ n разъ больше поверхности каждой отдѣльной банки, изъ которыхъ составлена батарея.

Отсюда выходитъ, что

$$W = \frac{1}{2}\, \lambda\, \frac{Q_1^2}{n}$$

Энергія батареи прямо пропорціональна квадрату заряжанія и обратно пропорціональна числу банокъ. Этотъ законъ открытъ Риссомъ [1]) опытнымъ путемъ.

203. Разсмотримъ теперь неполныя разряжанія. — Возьмемъ двѣ батареи, и пусть одна состоитъ изъ n, а другая изъ n' банокъ, которыя всѣ между собою совершенно равны. Какъ обыкновенно, зарядимъ первую батарею до maximum; тогда потенціальная энергія ея будетъ

$$W = \frac{1}{2}\, n\, V_1 q_1$$

Въ то время какъ вторая батарея будетъ находиться въ нейтральномъ состояніи, соединимъ внутреннія обкладки обѣихъ батарей; при этомъ зарядъ nq_1 распространится на $n + n'$ банокъ, и каждая изъ нихъ будетъ имѣть зарядъ

$$q'_1 = \frac{nq_1}{n+n'}$$

Теперь мы имѣемъ новую батарею, состоящую изъ $n + n'$ банокъ. Потенціалъ на внутреннихъ обкладкахъ будетъ

$$V'_1 = \lambda q' = \frac{n\lambda q_1}{n+n'} = V_1\, \frac{n}{n+n'}$$

[1]) Riess, Die Lehre von der Reibungselektricität. Berlin, 1853.

а потенціальная энергія ихъ —

$$W' = \frac{1}{2}(n+n')\,V'_1\,q'_1 = W\frac{n}{n+n'}$$

Работа, произведенная во время этого явленія, равна уменьшенію потенціальной энергіи $W - W'$, т. е.

$$W - W' = W\frac{n'}{n+n'}$$

И эту формулу Риссъ нашелъ также опытнымъ путемъ.

204. Въ заключеніе, разсмотримъ еще заряжаніе каскадами. Пусть дано нѣсколько батарей, соединенныхъ между собою каскадами; первая состоитъ изъ n_1 банокъ, вторая — изъ n_2, третья — изъ n_3, ... Пусть всѣ банки будутъ совершенно одинаковыя, и внѣшнія обкладки послѣдней батареи находятся въ сообщеніи съ землею, а внутреннія обкладки первой сообщены съ источникомъ электричества, потенціалъ котораго V_1. Внутренняя оболочка первой батареи пріобрѣтаетъ зарядъ $+Q_1$ и производитъ на внѣшней зарядъ $-Q_2$ и зарядъ $+Q_2$ на внутренней оболочкѣ второй батареи. Пусть V_2 будетъ потенціалъ на соединенныхъ между собою проводникахъ. Такимъ же образомъ произойдетъ зарядъ $-Q_3$ на внѣшней обкладкѣ второй и $+Q_3$ на внутренней обкладкѣ третьей батареи; при этомъ потенціалъ пусть будетъ V_3, и т. д. Потенціалъ на послѣдней оболочкѣ равенъ нулю; поэтому получимъ:

$$W = \frac{1}{2}(V_1 Q_1 - V_2 Q_2 + V_2 Q_2 - V_3 Q_3 + V_3 Q_3 - \ldots)$$

или

$$W = \frac{1}{2} V_1 Q_1$$

что̀ уже ясно a priori, по сдѣланному замѣчанію въ n^0 200.

Для банки, зарядъ которой q_1, по найденному въ n^0 180 отношенію, вообще имѣемъ:

$$q_1 = \frac{(V_1 - V_2)\,S_1}{4\pi e_1}$$

при чемъ V_1 и V_2 означаютъ величины потенціаловъ на внутреннихъ и внѣшнихъ обкладкахъ. Какъ прежде, положимъ, что $\lambda = \frac{4\pi e_1}{S_1}$; тогда получимъ:

$$V_1 - V_2 = \lambda q_1$$

Теперь зарядъ каждой банки въ первой батареѣ равенъ $\frac{Q_1}{n_1}$, поэтому

$$V_1 - V_2 = \lambda\frac{Q_1}{n_1}$$

Такимъ же образомъ для прочихъ батарей получимъ:

$$V_2 - V_3 = \lambda\frac{Q_2}{n_2}$$

$$V_3 - V_4 = \lambda\frac{Q_3}{n_3}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

и для послѣдней —

$$V_m - 0 = \lambda\frac{Q_m}{n_m}$$

Если сложить всѣ уравненія почленно, то будетъ:

$$V_1 = \lambda\left(\frac{Q_1}{n_1} + \frac{Q_2}{n_2} + \frac{Q_3}{n_3} + \ldots\ldots\right)$$

Положимъ, что мы имѣемъ дѣло съ совершенно сомкнутыми банками; тогда заряды на обѣихъ обкладкахъ каждой изъ нихъ будутъ равны, и получимъ:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots\ldots$$

слѣдовательно,

$$V_1 = \lambda Q_1\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots\right)$$

или

$$W = \frac{1}{2} \lambda Q_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots \right)$$

Это есть общая потенціальная энергія батарей, т. е. работа, которую нужно израсходовать при заряжаніи, или теплота, производимая во время разряжанія. Риссъ опытомъ нашелъ для двухъ батарей:

$$W = \frac{1}{2} \lambda Q_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

Работа магнитныхъ силъ.

205. Предъидущія разсужденія могутъ быть приложены также и къ намагниченнымъ тѣламъ. По Кулону, допускаютъ существованіе двухъ магнитныхъ жидкостей, сходныхъ съ электрическими, и полагаютъ, что намагничиваніе состоитъ въ раздѣленіи обѣихъ жидкостей. Но, въ то время какъ электрическія жидкости раздѣляются вполнѣ и могутъ переходить съ одного тѣла на другое,— раздѣленіе магнитныхъ жидкостей происходитъ только внутри чрезвычайно маленькихъ частицъ, такъ что каждая изъ нихъ постоянно содержитъ одинаковое количество обѣихъ жидкостей. Дѣйствіе ихъ также обратно пропорціонально квадрату разстояній, а работу магнитныхъ силъ можно опредѣлить такимъ же образомъ, какъ и работу электрическихъ силъ, — съ помощью функціи

$$W = \sum \frac{dq\,dq'}{r}$$

Разсмотримъ систему, составленную изъ двухъ магнитныхъ тѣлъ A и B. При этомъ функція W состоитъ изъ трехъ частей: двѣ первыя, которыя мы означимъ чрезъ W_a и W_b, относятся къ дѣйствію каждаго магнита на самого себя, а третья $W_{a,b}$ относится къ дѣйствію обоихъ магнитовъ другъ на друга. Если V_a и V_b означаютъ ихъ потенціалы, то

$$W_a = \frac{1}{2} \int V_a\,dq \quad , \quad W_b = \frac{1}{2} \int V_b\,dq'$$

$$W_{a,b} = \int V_a\,dq' = \int V_b\,dq$$

При чемъ dq и dq' означаютъ элементы перваго и втораго магнитовъ. Если оба магнита постоянны, то и ихъ энергіи W_a и W_b тоже постоянны; работа же происходитъ отъ одного только относительнаго движенія магнитовъ; и тогда

$$dL = -\,dW_{a,b}$$

Мы видѣли (n^0 192), что дѣйствіе системы данныхъ электрическихъ массъ ко внѣ равно дѣйствію равнаго имъ по массѣ слоя, распространяющагося по извѣстному закону на поверхности, окружающей эту систему. Поэтому дѣйствіе магнита ко внѣ такое же, какъ и дѣйствіе слоя, распространяющагося по поверхности магнита и состоящаго изъ равныхъ количествъ обѣихъ жидкостей. Слѣдовательно, при разсматриваніи внѣшняго дѣйствія магнита — магнитъ можно замѣнить этимъ слоемъ.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Гипотеза объ одной жидкости.

206. Теорія электростатическихъ явленій основана на одномъ только законѣ Кулона. Теоремы, которыя мы разсматривали, и которыя подтверждаются опытомъ, суть слѣдствія этого основнаго закона. Для выраженія закона Кулона и выведенныхъ изъ него слѣдствій мы воспользовались гипотезою двухъ электрическихъ жидкостей. Но, ясно, что это особый только способъ выраженія, и что истина теоріи не зависитъ какъ отъ этой гипотезы, такъ и отъ всякой другой, которую можно было бы составить о природѣ электричества.

Въ прошломъ столѣтіи Франклину удалось объяснить электростатическія явленія посредствомъ одной только жидкости, при чемъ, однако, необходимо допустить вліяніе вѣсомой матеріи на дѣйствіе. Въ этомъ случаѣ каждый элементъ объема содержитъ извѣстное количество вѣсомой матеріи и извѣстное количество электрической жидкости; далѣе, между каждыми двумя вѣсомыми частицами, а также между вѣсомыми и электрическими существуетъ притяженіе; отталкиваніе же, напротивъ того, происходитъ между двумя электрическими частицами; всѣ эти силы обратно пропорціональны квадратамъ разстояній.

Разсмотримъ сначала дѣйствіе элементарнаго объема A, содержащаго вѣсомую массу M и электрическую μ, на электрическую

массу m', находящуюся на разстояніи r. Это дѣйствіе состоитъ изъ двухъ силъ: одной притягательной $\frac{f_1 Mm'}{r^2}$ и одной отталкивательной $\frac{f_2 \mu m'}{r^2}$; ихъ равнодѣйствующая есть

$$\frac{(f_1 M - f_2 \mu) m'}{r^2}$$

Въ томъ случаѣ, когда $f_1 M - f_2 \mu = 0$ или $\frac{\mu}{M} = \frac{f_1}{f_2}$, равнодѣйствующая равна нулю, и говорятъ, что элементъ A находится въ нейтральномъ состояніи; очевидно, онъ не производитъ никакого дѣйствія на окружающія электрическія массы. Если принять коеффиціентъ f_2 очень большимъ относительно f_1, то электрическая масса μ будетъ очень мала относительно вѣсомой M. Поэтому, тѣло находится въ нейтральномъ состояніи, когда количество содержащагося въ немъ электричества находится въ извѣстномъ отношеніи къ количеству вѣсомой матеріи.

207. Разсмотримъ теперь взаимное дѣйствіе двухъ элементарныхъ объемовъ A и B въ нейтральномъ состояніи. Пусть первый заключаетъ вѣсомую массу M и электрическую μ, второй-же — вѣсомую массу M' и электрическую μ'; тогда получимъ:

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\mu'}{M'} = \frac{f_1}{f_2}$$

Дѣйствіе будетъ составная изъ четырехъ силъ:

$$\frac{fMM'}{r^2} + \frac{f_1 M\mu'}{r^2} + \frac{f_1 M'\mu}{r^2} - \frac{f_2 \mu\mu'}{r^2}$$

т. е. изъ притяженія вѣсомыхъ массъ M и M', изъ притяженія вѣсомой массы M и электрической μ', изъ притяженія вѣсомой массы M' и электрической μ и, наконецъ, изъ отталкиванія электрическихъ массъ μ и μ'. Эта равнодѣйствующая сведется на

$$\frac{MM'}{r^2}\left(f + \frac{f_1{}^2}{f_2}\right)$$

Если φ будетъ означать постоянную $f+\frac{f_1^2}{f_2}$, то равнодѣйствующая приметъ простой видъ:

$$\frac{\varphi MM'}{r^2}$$

Это есть общій законъ притяженія или законъ тяготѣнія.

208. Наэлектризованное тѣло есть такое, которое содержитъ бо̀льшее или меньшее количество электричества, чѣмъ то, которое мы только что опредѣлили и которое характеризуетъ нейтральное состояніе. Оно наэлектризовано положительно, когда электрическая матерія въ избыткѣ, и, напротивъ того, — отрицательно, когда она находится въ меньшемъ количествѣ.

Разсмотримъ теперь взаимное дѣйствіе электрическихъ элементарныхъ объемовъ A и B. Пусть первый элементъ содержитъ вѣсомую массу M и электрическую $\frac{f_1 M}{f_2}+m$, а второй — вѣсомую массу M' и электрическую $\frac{f_1 M'}{f_2}+m'$. При этомъ дѣйствіе опять-таки будетъ составная изъ четырехъ силъ:

$$\frac{fMM'}{r^2}+\frac{f_1 M\left(\frac{f_1 M'}{f_2}+m'\right)}{r^2}+\frac{f_1 M'\left(\frac{f_1 M}{f_2}+m\right)}{r^2}$$

$$-\frac{f_2\left(\frac{f_1 M}{f_2}+m\right)\left(\frac{f_1 M'}{f_2}+m'\right)}{r^2}$$

или

$$\frac{MM'}{r^2}\left(f+\frac{f_1^2}{f_2}\right)-\frac{f_2 mm'}{r^2}$$

то есть

$$\frac{\varphi MM'}{r^2}-\frac{f_2 mm'}{r^2}$$

Первый членъ $\frac{\varphi MM'}{r^2}$ есть тяготѣніе, а второй $-\frac{f_2 mm'}{r^2}$ — электрическое дѣйствіе. Пренебрегая тяготѣніемъ и разсматривая только электрическое дѣйствіе, мы увидимъ, что произойдетъ отталкиваніе, если тѣла наэлектризованы тѣмъ же электричествомъ и, напротивъ того, — притяженіе, когда они наэлектризованы противоположно; выраженіе же электрической силы $-\frac{f_2 mm'}{r^2}$ зависитъ только отъ положительнаго или отрицательнаго избытковъ m и m'. Эти избытки суть не что иное, какъ то, что̀ мы называемъ свободнымъ электричествомъ въ объемахъ A и B. И такъ, мы опять пришли къ закону Кулона. Слѣдовательно, гипотеза одной жидкости, въ связи съ дѣйствіемъ вѣсомой матеріи, совершенно такимъ же образомъ объясняетъ всѣ явленія, какъ и гипотеза двухъ различныхъ жидкостей.

Можно было бы избавиться отъ предположенія, что происходитъ притяженіе между вѣсомыми массами: достаточно было бы только притяженія вѣсомой и электрической матерій, чтобы объяснить тяготѣніе; а это снова приводится къ тому, что мы полагаемъ $f=0$ и, слѣдовательно, $\varphi=\frac{f_1^2}{f_2}$.

209. Если допустить болѣе вѣроятную гипотезу одной жидкости, то весьма естественно принять, что эта жидкость есть не что иное, какъ эфиръ, посредствомъ колебаній котораго мы объясняемъ свѣтовыя явленія. Однако, опытъ показываетъ, что въ пустомъ пространствѣ, т. е. при отсутствіи всякой вѣсомой матеріи, не происходитъ ни какихъ электрическихъ явленій. Отсюда, кажется, выходитъ, что электрическую жидкость нельзя разсматривать какъ все количество эфира, заключающагося въ данномъ объемѣ, но какъ сумму эфирныхъ атмосферъ, окружающихъ вѣсомыя частицы (n^0 2), т. е. какъ избытокъ всего количества содержащагося въ объемѣ эфира надъ тѣмъ его количествомъ, которое онъ содержалъ бы, еслибы совершенно не существовало вѣсомыхъ частицъ.—Для объясненія электрическихъ явленій достаточно принять, что вѣсомая матерія притягиваетъ эфиръ въ обратномъ отношеніи квадратовъ разстояній, и что взаимное дѣйствіе двухъ эфирныхъ атмосферъ пропорціонально произведенію изъ ихъ массъ и обратно пропорціонально квадратамъ разстояній.

По этому поводу мы замѣтимъ, что теорія свѣтовыхъ явленій требуетъ совершенно другаго закона дѣйствія между сосѣдними частицами эфира. Прежде всего, огромная скорость распространенія указываетъ на то, что сила, съ которою дѣйствуютъ другъ на друга двѣ смежныя частицы, весьма велика. Теоретическія изслѣдованія Коши показываютъ, что въ изотропной средѣ, напримѣръ, въ эфирѣ, свободно распространенномъ въ пустомъ пространствѣ, могутъ распространяться два рода колебаній, поперечныя и продольныя, съ весьма различными скоростями. Существованіе того или другаго рода колебаній зависитъ отъ закона, которому слѣдуютъ частичныя силы. Свѣтовыя явленія приписываются поперечнымъ колебаніямъ. Я продолжилъ методъ Коши и показалъ, что если должны распространяться поперечныя колебанія, то сила, производимая двумя смежными частицами эфира, должна быть обратно пропорціональна разстояніямъ въ степени высшей, чѣмъ четвертая. Разсматриваніе законовъ распространенія свѣта въ двупреломляющей средѣ показываетъ, что эта степень именно шестая, а отсутствіе разсѣянія въ пустомъ пространствѣ приводитъ къ тому же заключенію. И такъ, существуетъ кажущееся противорѣчіе между этими двумя законами. Но, вѣроятно, свѣтовыя явленія происходятъ отъ непосредственнаго дѣйствія эфирныхъ частицъ на близь лежащія молекули, между тѣмъ, какъ по тому воззрѣнію, котораго мы теперь придерживаемся, электрическая сила происходитъ отъ дѣйствія силы упругости или эластичности эфирныхъ атмосферъ, окружающихъ вѣсомыя частицы *).

---

*) Совершенно оригинальныя объясненія электрическихъ и электродинамическихъ явленій по гипотезѣ эфира, т. е. съ чисто механической точки зрѣнія, читатель найдетъ въ «Единствѣ физическихъ силъ» А. Секки, переводъ Ф. Павленкова. *Примѣч. перев.*

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Теорія электрическихъ токовъ.

Предварительныя разсужденія. — Законъ Ома. — Линейные проводники. — Работа электровозбудительныхъ силъ. — Законъ Джуля.

Предварительныя разсужденія.

210. Если въ каждой точкѣ проводника потенціалъ будетъ имѣть одно и тоже значеніе, то наступитъ равновѣсіе электричества; напротивъ того, если въ каждой точкѣ эта функція не будетъ имѣть того же самаго значенія, то электричество станетъ двигаться, а въ этомъ-то движеніи и заключаются электрическіе токи. Если потенціалъ есть функція однихъ только x, y, z и не зависитъ отъ времени, то движеніе электричества почти мгновенно переходитъ въ постоянно правильное, которымъ мы и займемся теперь.

Сила, дѣйствующая въ каждой точкѣ на единичную массу, и производящая чрезъ то движеніе электричества, есть $-\frac{dV}{dn}$, если dn означаетъ элементъ нормали къ поверхности уровня, проходящей черезъ эту точку. Этой силѣ дали названіе электровозбудительной силы. Если электричество движется черезъ систему вѣсомыхъ частицъ, то оно толкаетъ ихъ и сообщаетъ имъ часть живой силы, что̀ обнаруживается нагрѣваніемъ проводника. Среднюю величину дѣйствія такого сообщенія живой силы можно вычислить какъ и при обыкновенномъ треніи, представляя себѣ

противодѣйствіе движенію, происходящее отъ вѣсомой среды. Поэтому каждую безконечно малую электрическую массу m разсматриваютъ какъ побуждаемую двумя силами: электровозбудительною $F = -m\frac{dV}{dn}$ и сопротивленіемъ R вѣсомой среды. Далѣе, опытъ показываетъ, что коль скоро перестаетъ дѣйствовать электровозбудительная сила, т. е. коль скоро потенціалъ будетъ постоянный, — тотчасъ же прекращается движеніе электричества. Явленіе происходитъ такъ, какъ еслибы тѣло двигалось въ сопротивляющейся средѣ, плотность которой, относительно плотности тѣла, очень велика.

211. Въ моментъ, когда перестаетъ дѣйствовать сила F — электрическая масса m имѣетъ скорость u и живую силу $\frac{mu^2}{2}$; при этомъ она подвержена только сопротивленію вѣсомой среды и, пройдя весьма малый прямолинейный путь l, приходитъ въ покой. Работа сопротивленія во время этого пути равна живой силѣ, и, слѣдовательно, получимъ уравненіе:

$$\int R'\,ds = \frac{mu^2}{2}$$

гдѣ ds означаетъ элементъ пройденнаго пути, а R' — уменьшающееся сопротивленіе. Это сопротивленіе R' менѣе сопротивленія R, соотвѣтствующаго скорости u, а потому интегралъ будетъ менѣе, чѣмъ Rl, и, слѣдовательно, получимъ: $R > \frac{mu^2}{2l}$. — Разсмотримъ теперь постоянный токъ въ проволокѣ, одинаковаго вездѣ сѣченія, представляющаго кругъ съ радіусомъ L. При этомъ электрическія массы находятся въ круговомъ и однообразномъ движеніи, ускореніе котораго направлено къ центру и равно $\frac{u^2}{L}$. Равнодѣйствующая двухъ силъ F и R, дѣйствующихъ на массу m, имѣетъ направленіе по радіусу и равна $\frac{mu^2}{L}$. Такъ какъ сила R болѣе чѣмъ $\frac{mu^2}{2l}$, то отношеніе равнодѣйствующей къ этой силѣ R будетъ менѣе, чѣмъ $\frac{2l}{L}$. Отношеніе это очень мало, если, какъ мы предполагаемъ,

длина l, проходимая во время прекращенія тока, весьма мала, сравнительно съ L. И такъ, діагональ параллелограмма очень мала относительно одной изъ боковыхъ силъ R, а, слѣдовательно, обѣ силы F и R почти равны и противоположны. Такъ какъ сопротивленіе R направлено противоположно скорости, то изъ этого заключаемъ, что направленіе скорости u почти совпадаетъ съ направленіемъ электровозбудительной силы F.

Отсюда выходитъ, что любая электрическая масса m описываетъ въ проводникѣ линію, почти ортогональную къ поверхностямъ уровня. Если представимъ себѣ объемъ проводника разбитымъ на рядъ ортогональныхъ каналовъ, поперечныя сѣченія которыхъ состоятъ изъ различныхъ элементовъ $d\omega$ поверхности уровня, то движеніе въ каждомъ каналѣ будетъ происходить особо, а общее движеніе электричества въ проводникѣ мы можемъ разсматривать какъ совокупность всѣхъ этихъ линейныхъ токовъ. Электрическія массы, находящіяся вблизи поверхности проводника, имѣютъ скорости, параллельныя этой поверхности, и, слѣдовательно, поверхности уровня пересѣкаютъ поверхность проводника нормально.

212. Для вывода теоріи, можно воспользоваться одинаково удобно какъ гипотезою одной жидкости, такъ и гипотезою двухъ. Принимая гипотезу одной жидкости, допустимъ, что она движется электровозбудительною силою по направленію этой силы. При чемъ, если угодно, движеніе электрической жидкости въ линейныхъ каналахъ можно сравнить съ движеніемъ воды въ цилиндрѣ. Въ этомъ случаѣ напряженіе тока есть то количество электричества di, которое протекаетъ въ единицу времени черезъ поперечное сѣченіе $d\omega$.

При гипотезѣ двухъ жидкостей необходимо принять (такъ какъ онѣ приводятся въ движеніе электровозбудительною силою въ противоположныхъ направленіяхъ), что въ одномъ и томъ же каналѣ единовременно существуютъ два тока, изъ которыхъ одинъ, содержащій положительное электричество, движется въ одномъ направленіи, а другой, содержащій отрицательное электричество, движется въ противоположномъ направленіи. Далѣе, такъ какъ электровозбудительная сила дѣйствуетъ съ одинаковымъ напряженіемъ на равныя по массѣ жидкости, и обѣ онѣ находятся въ одинаковыхъ

обстоятельствахъ, то въ единицу времени чрезъ поперечное сѣченіе $d\omega$ канала протекаютъ равныя количества $\frac{di}{2}$ обѣихъ жидкостей; а такъ какъ напряженіе каждаго тока равно $\frac{di}{2}$, то напряженіе двойнаго тока будетъ равно di.

Законъ Ома.

213. Принимаютъ, что количество электричества, проходящаго въ единицу времени чрезъ элементъ $d\omega$ поверхности уровня, пропорціонально электровозбудительной силѣ $-\frac{dV}{dn}$, дѣйствующей въ томъ мѣстѣ, гдѣ лежитъ разсматриваемый элементъ. Поэтому, если означимъ чрезъ a постоянную, зависящую отъ природы проводника, то

$$(I) \qquad di = -a\frac{dV}{dn}d\omega$$

На этой основной гипотезѣ, которая есть не что иное, какъ законъ Ома [1]), построена теорія постоянныхъ токовъ. Она оправдывается ея слѣдствіями.

214. Первое слѣдствіе этого закона заключается въ томъ, что внутри проводника вездѣ существуетъ нейтральное состояніе. Разсмотримъ теперь объемъ, ограниченный безконечно малымъ ортогональнымъ каналомъ и двумя соотвѣтствующими элементами поверхности $d\omega_1$ и $d\omega_2$ двухъ смежныхъ поверхностей уровня. Возьмемъ сначала въ основаніе гипотезу одной жидкости. Пусть, при этомъ, въ весьма малое время Θ черезъ основаніе $d\omega_1$ входитъ количество жидкости, равное $-a\Theta\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1$, а чрезъ противолежащее основаніе $d\omega_2$, въ тоже самое время, выходитъ количество ея

[1]) Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet von Dr. G. S. Ohm. Berlin, 1827, и Kirchhoff, Pogg. Ann. Bd. LXXVIII, S. 506.

$-a\Theta\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2$. Имѣя въ виду сказанный случай, положимъ теперь, что производная $\frac{dV}{dn}$ будетъ отрицательная, если станемъ переходить отъ предѣла 1 къ 2. Слѣдовательно, содержащееся въ этомъ объемѣ количество электричества во время Θ получитъ приращеніе

$$-a\Theta\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2\right]$$

Такъ какъ токъ постоянный, то количество электричества, содержащагося въ каждомъ элементарномъ объемѣ проводника, должно быть одно и тоже, и, слѣдовательно, необходимо, чтобы

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2 = 0$$

Но, по теоремѣ n^0 176, лѣвая часть равна $4\pi q$, гдѣ q означаетъ свободное электричество, находящееся въ разсматриваемомъ объемѣ; поэтому должно быть $q = 0$ и, слѣдовательно, выходитъ, что внутри проводника не можетъ быть свободнаго электричества. Такимъ образомъ движущаяся внутри жидкость имѣетъ вездѣ нормальную плотность, соотвѣтствующую нейтральному состоянію этого проводника.

215. Отсюда, кажется, слѣдуетъ, что сопротивленіе проводника движенію жидкости пропорціонально скорости u. Поэтому, если означимъ черезъ $m\varphi(u)$ сопротивленіе, производимое на массу m жидкости, и такъ какъ это сопротивленіе почти равно и противоположно дѣйствующей на нее электровозбудительной силѣ $-m\frac{dV}{dn}$, то

$$\varphi(u) = -\frac{dV}{dn}$$

Но, съ другой стороны, если ρ означаетъ плотность нейтральной жидкости, то количество ея, протекающее въ единицу времени

чрезъ элементъ $d\omega$, есть $di = \rho u d\omega$; по закону же Ома эта величина равна $-a\dfrac{dV}{dn}d\omega$, и, слѣдовательно, получимъ: $-\dfrac{dV}{dn} = \dfrac{\rho}{a}u$, а

$$\varphi(u) = \frac{\rho}{a}u$$

216. Возьмемъ теперь въ основаніе нашихъ разсужденій гипотезу двухъ жидкостей. При этомъ, во время Θ въ объемъ вступаетъ количество $-\dfrac{a\Theta}{2}\left(\dfrac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1$ положительной жидкости чрезъ основаніе $d\omega_1$, чрезъ противолежащее же основаніе $d\omega_2$ вытекаетъ $-\dfrac{a\Theta}{2}\left(\dfrac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2$; слѣдовательно, содержащееся въ объемѣ количество положительнаго электричества получитъ приращеніе

$$-\frac{a\Theta}{2}\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2\right]$$

Въ тоже самое время чрезъ основаніе $d\omega_1$ выходитъ количество $-\dfrac{a\Theta}{2}\left(\dfrac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1$ отрицательной жидкости, а чрезъ противолежащее основаніе $d\omega_2$ входитъ количество $-\dfrac{a\Theta}{2}\left(\dfrac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2$; слѣдовательно, содержаніе отрицательной жидкости въ объемѣ уменьшится на

$$-\frac{a\Theta}{2}\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2\right]$$

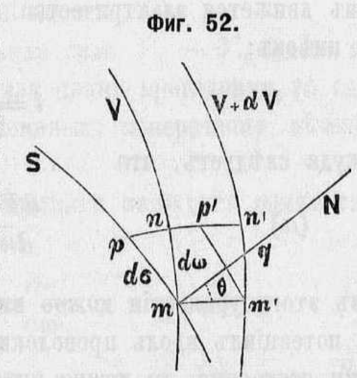
Сумма этихъ двухъ количествъ есть приращеніе свободнаго электричества. И такъ, мы снова придемъ къ тому же самому выраженію, какъ прежде, и къ тому же самому заключенію, что каждый элементарный объемъ находится въ нейтральномъ состояніи, и, слѣдовательно, что онъ содержитъ равныя количества положительной и отрицательной жидкостей.

Изъ того обстоятельства, что внутри проводника не существуетъ свободнаго электричества, необходимо слѣдуетъ, что свободное электричество, которое есть причина потенціала, находится

или на поверхности самаго проводника, или внѣ ея. При обыкновенныхъ опытахъ, когда химическія дѣйствія или теплота производятъ электрическій токъ, — электрическихъ массъ внѣ не существуетъ: при этомъ все свободное электричество распространяется по поверхности проводника въ видѣ безконечно тонкаго слоя. Но, этотъ слой не находится въ равновѣсіи, потому что его потенціалъ не имѣетъ постояннаго значенія ни внутри, ни на поверхности проводника; поэтому, кажется, онъ самъ движется по поверхности, а такъ какъ его масса, сравнительно съ массою внутри тока, очень мала, то имъ можно пренебречь.

217. Уравненіе (I) даетъ количество электричества, проходящаго въ единицу времени чрезъ элементъ поверхности уровня.—Теперь мы опредѣлимъ то количество электричества di, которое проходитъ чрезъ элементъ $mp = d\sigma$ любой поверхности S (фиг. 52). Количество электричества, протекающаго черезъ элементъ $d\sigma$ въ безконечно малое время dt, заключается въ цилиндрѣ $mpp'm'$, боковая поверхность котораго mm' перпендикулярна къ поверхности уровня, проходящаго чрезъ точку m. Пусть чрезъ точку m' проходитъ поверхность уровня $V + dV$. При этомъ косой цилиндръ $mpp'm'$ равномѣренъ прямому $mnn'm'$, представляющему количество электричества, протекающаго чрезъ элементъ $mn = d\omega$ поверхности уровня V. Поэтому имѣемъ:

Фиг. 52.



$$di = -a\frac{dV}{dn}d\omega$$

Пусть теперь dn и ds будутъ части mm' и mq нормалей къ поверхностямъ V и S въ точкѣ m, лежащія между двумя безконечно близкими поверхностями уровня V и $V + dV$, а θ — уголъ, образуемый обѣими нормалями; тогда

$$dn = ds \cos\theta, \quad d\omega = d\sigma \cos\theta$$

и, слѣдовательно,

$$(I') \qquad di = -a \frac{dV}{ds} d\sigma$$

Это и есть законъ Ома въ самомъ общемъ его видѣ.

Линейные проводники.

218. Обыкновенно пользуются длинными проводниками съ весьма малымъ поперечнымъ сѣченіемъ. Въ такомъ случаѣ нормальное поперечное сѣченіе ω проводника можно разсматривать какъ элементъ поверхности уровня, а проволоку — какъ каналъ, въ которомъ движется электричество. Если i означаетъ напряженіе тока, то имѣемъ:

$$i = -a\omega \frac{dV}{dn}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$(a) \qquad \frac{dV}{dn} = -\frac{i}{a\omega}$$

Изъ этого уравненія можно видѣть законъ, по которому измѣняется потенціалъ вдоль проволоки. Если поперечное сѣченіе ω проволоки постоянно, то можно интегрировать, и получимъ:

$$V_2 - V_1 = -\frac{i}{a\omega} l$$

при чемъ l есть длина проволоки между мѣстами 1 и 2 по направленію тока. Въ этомъ случаѣ потенціалъ уменьшается въ арифметической прогрессіи и, слѣдовательно,

$$(II) \qquad i = \frac{V_1 - V_2}{\left(\frac{l}{a\omega}\right)}$$

Эта формула представляетъ законъ Ома для линейныхъ токовъ. Разность $V_1 - V_2$ значеній потенціала на обоихъ концахъ проволоки есть то, что физики называютъ электровозбудительною силою всего тока. Постоянной величинѣ $\frac{l}{a\omega}$ дали названіе сопротивленія проводника. Если означимъ сопротивленіе чрезъ λ, то формула (II) приметъ видъ:

$$(II') \qquad i = \frac{V_1 - V_2}{\lambda}$$

Эта формула (II') была изслѣдована различными способами.

1) Если столбъ, вмѣсто одного элемента, будетъ состоять изъ двухъ, а проводникъ останется тотъ же, то напряженіе удвоится. При этомъ опытѣ нужно остерегаться ошибокъ, которыя могутъ произойдти отъ введенія въ цѣпь новаго элемента.

2) Такъ какъ электровозбудительная сила $V_1 - V_2$ будетъ таже, станемъ ли мы измѣнять сѣченіе или длину проводника, то, слѣдовательно, напряженіе тока пропорціонально поперечному сѣченію и обратно пропорціонально длинѣ.

219. Если поперечное сѣченіе проводника не будетъ одинаково, то уравненіе (a) дастъ:

$$-dV = i\frac{dn}{a\omega}$$

Положимъ теперь, что $\frac{dn}{a\omega} = d\lambda$, гдѣ $d\lambda$ есть сопротивленіе элемента dn проволоки; тогда сопротивленіе λ всего проводника выразится интеграломъ:

$$\lambda = \int_1^2 \frac{dn}{a\omega}$$

Поэтому предъидущее уравненіе перейдетъ въ

$$-dV = i\,d\lambda$$

и, слѣдовательно,

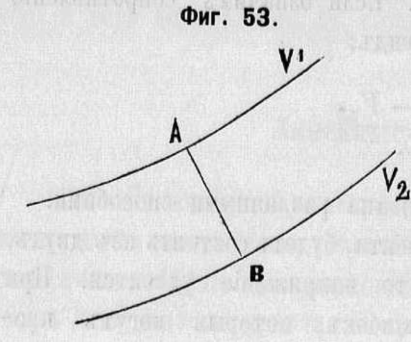
$$V_1 - V_2 = i\lambda, \quad i = \frac{V_1 - V_2}{\lambda}$$

Это уравненіе имѣетъ тотъ же самый видъ, какъ и уравненіе (II').

Работа электровозбудительныхъ силъ. — Законъ Джуля [1]).

220. Чтобы опредѣлить работу силы — $dq\,\frac{dV}{dn}$, дѣйствующей на безконечно малую электрическую массу dq, проведемъ въ проводникѣ кривую AB (фиг. 53), ортогональную къ поверхностямъ уровня. Если въ безконечно малое время dt электрическая частица пробѣгаетъ элементъ пути dn, нормальный къ поверхности уровня, то элементарная работа силы будетъ

Фиг. 53.



$$-dq\,\frac{dV}{dn}\,dn = -dq\,dV$$

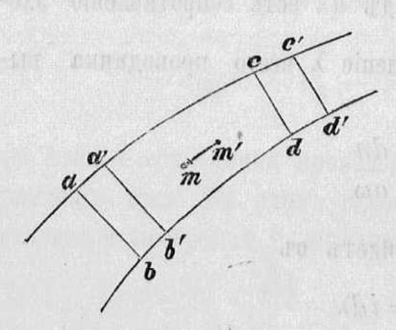
а работа отъ точки A до точки B —

$$dq\,(V_1 - V_2)$$

если V_1 и V_2 — значенія потенціала въ A и B.

Такимъ образомъ оказывается, что эта работа равна работѣ такого груза dq, который падаетъ съ уровня V_1 до уровня V_2.

Фиг. 54.



221. Разсмотримъ теперь токъ въ проводникѣ удлиненной формы и окруженномъ изолирующею средою. — Пусть ab и cd будутъ сѣченія проводника съ двумя поверхностями уровня V_1 и V_2 (фиг. 54). Опредѣлимъ, при этомъ, работу, произведенную въ безконечно малое время dt дѣйствіемъ электровозбудительныхъ силъ на количество электричества, заключающагося между этими двумя поверхностями. — Пусть къ концу времени dt эта масса пришла въ $a'b'c'd'$; при этомъ любая частичка dq прошла маленькую дугу mm', и элементарная работа силы, дѣйствующей на эту частицу, равна $dq\,(V - V')$, если V и V' будутъ значенія потенціала въ точкахъ m и m'. Работа же, соотвѣтствующая всей массѣ, будетъ

$$dL = \int (V - V')\,dq = \int V\,dq - \int V'\,dq$$

при чемъ знакъ суммы относится ко всей разсматриваемой массѣ. Въ этомъ выраженіи V есть значеніе потенціала въ той точкѣ, гдѣ ко времени t находится электрическая частица dq, а V' — значеніе его въ той точкѣ, гдѣ эта же самая частица находится ко времени $t + dt$. Поэтому, первая сумма распространяется на пространство $abcd$, а вторая — на $a'b'c'd'$. Такъ какъ потенціалъ не зависитъ отъ времени, то ясно, что члены суммъ, относящіеся къ общей части $a'b'cd$, равны между собою, и потому первую сумму можно ограничить безконечно малымъ объемомъ $aba'b'$, а вторую — безконечно малымъ объемомъ $cdc'd'$. Такъ какъ потенціалъ въ этихъ безконечно малыхъ объемахъ имѣетъ почти постоянныя значенія V_1 и V_2, то для обѣихъ суммъ получимъ:

$$V_1 \int dq, \quad V_2 \int dq$$

Но, такъ какъ массы, содержащіяся въ обоихъ объемахъ, равны и равны именно количеству электричества $i\,dt$, протекающему во время dt чрезъ поперечное сѣченіе, то получимъ:

$$dL = (V_1 - V_2)\,i\,dt$$

Это и есть работа электровозбудительныхъ силъ, дѣйствующихъ втеченіе времени dt на электрическія массы, находящіяся между обѣими поверхностями уровня V_1 и V_2. Работа же, произведенная въ единицу времени, будетъ

$$(III) \qquad L = (V_1 - V_2)\,i$$

[1]) W. Thomson, Philosophical Magazine S. IV. vol. II, p. 551. Clausius, Pogg. Ann. Bd. LXXXVII. S. 415.

Отсюда выходитъ, что эта работа такая же, какъ и работа груза i, падающаго отъ уровня V_1 до уровня V_2.

222. По общей теоремѣ живыхъ силъ, работа dL электровозбудительныхъ силъ во время dt равна измѣненію живой силы разсматриваемой электрической массы $abcd$, плюсъ произведенной внѣшней работѣ. Но эта внѣшняя работа состоитъ изъ извѣстнаго количества тепловой энергіи, сообщаемой проводнику, плюсъ изъ работы, необходимой для измѣненія потенціальной энергіи проводника, въ томъ случаѣ, если онъ претерпѣваетъ какое нибудь измѣненіе состоянія или химическое превращеніе; плюсъ изъ механической внѣшней работы, взятой въ буквальномъ смыслѣ, если части проводника подвижны и производятъ внѣшнюю работу. — Предположимъ сначала, что проводникъ не претерпѣваетъ ни какого измѣненія въ потенціальной энергіи и не производитъ внѣшней работы. Съ другой стороны, какъ мы уже упомянули въ n^0 210, живая сила электрической массы очень мала, такъ что ею можно пренебречь. Поэтому, здѣсь можно сказать, что работа электровозбудительныхъ силъ равна тепловой энергіи, развивающейся въ проводникѣ.

Для линейнаго проводника, замѣнивъ $V_1 - V_2$ его значеніемъ изъ уравненія (II'), получимъ:

$$(IV) \qquad L = \lambda i^2$$

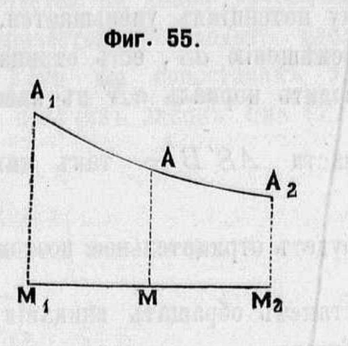
Количество теплоты, произведенное въ проводникѣ, пропорціонально его сопротивленію и квадрату напряженія тока. Это и есть законъ Джуля, найденный опытнымъ путемъ [1]).

223. Мы видѣли (n^0 221), что работа электровозбудительныхъ силъ въ каждую единицу времени равна работѣ груза i при паденіи его отъ уровня V_1 до уровня V_2. Это приводитъ насъ къ весьма простому способу представленія явленія. — Вообразимъ линейный проводникъ, растянутый прямо вдоль M_1M_2 (фиг. 55), и

[1]) Joule, Philosophical Magazine vol. XIX, 1841 и Doves Repertorium Bd. VIII. Это было подтверждено Беккерелемъ, Ann. de chim. et de phys. III-me. Sér. T. IX. Lenz, Pogg. Ann. Bd. LXI.

возставимъ изъ каждой точки M ординаты MA, соотвѣтствующія значенію потенціала въ этихъ точкахъ. Такимъ образомъ мы получимъ кривую A_1AA_2, которую можемъ разсматривать какъ путь при движеніи груза i. Если поперечное сѣченіе ω проводника вездѣ одинаково, то измѣненіе $V_1 - V_2$ потенціала будетъ пропорціонально длинѣ M_1M (n^0 218), и токъ изобразится, въ этомъ случаѣ, движеніемъ груза по прямой A_1A_2.

Фиг. 55.

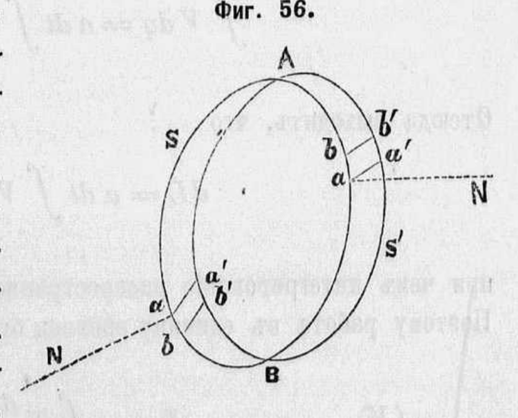


224. Чтобы дополнить эти разсужденія, разсмотримъ еще движеніе электричества въ любомъ проводникѣ. Представимъ себѣ внутри проводника сомкнутую поверхность S; тогда электрическая масса, окруженная этою поверхностью, будетъ передвигаться и ко времени dt приметъ положеніе S' (фиг. 56), безконечно близкое къ первому. Работа электровозбудительныхъ силъ, дѣйствующихъ на эту массу, будетъ

$$dL = \int (V - V')\, dq = \int V\, dq - \int V' dq$$

Первый интегралъ простирается на объемъ S, а второй — на объемъ S'. Такъ какъ члены обоихъ интеграловъ, относящіеся въ общему объему, пропадутъ, то достаточно разсмотрѣть такіе, которые относятся къ прочимъ остающимся частямъ ASB и $AS'B$. Если мы возьмемъ на поверхности любой элементъ $ab = d\sigma$, то количество электричества $aba'b'$, проходящаго чрезъ этотъ элементъ во время dt, по уравненію (I'), будетъ

Фиг. 56.



$$dq = -a \frac{dV}{ds}\, d\sigma\, dt$$

при чемъ ds означаетъ элементъ нормали aN къ поверхности S. Такъ какъ движеніе происходитъ въ томъ направленіи, по которому потенціалъ уменьшается, то значеніе dV, соотвѣтствующее перемѣщенію aa', есть отрицательная величина. Если условимся проводить нормаль aN въ каждой точкѣ ко внѣ, то для элемента части $AS'B$ — такъ какъ ds положительный — отношеніе $\frac{dV}{ds}$ будетъ отрицательное; поэтому возьмемъ $dq = -a\frac{dV}{ds}d\sigma\, dt$; если не станемъ обращать вниманія на общую часть, то второй интегралъ будетъ:

$$\int V' dq = -a dt \int V \frac{dV}{ds} d\sigma$$

Напротивъ того, для элемента части ASB отношеніе $\frac{dV}{ds}$ будетъ положительное, потому что ds отрицательный; слѣдовательно необходимо положить, что $dq = a\frac{dV}{ds}d\sigma\, dt$, и первый интегралъ будетъ:

$$\int V dq = a\, dt \int V \frac{dV}{ds} d\sigma$$

Отсюда выходитъ, что

$$dL = a\, dt \int V \frac{dV}{ds} d\sigma$$

при чемъ интегрированіе распространяется на всю поверхность S. Поэтому работа въ единицу времени будетъ

$$(V) \qquad L = a \int V \frac{dV}{ds} d\sigma$$

Мы приняли въ основаніе этой теоріи законъ Ома и вывели изъ него законъ Джуля; но можно было бы поступить и обратно: изъ

закона Джуля вывести законъ Ома. Въ самомъ дѣлѣ, замѣтимъ, что при выводѣ формулы (III) не требуется ни какой другой гипотезы, кромѣ той, что движеніе электричества происходитъ вдоль ортогоналей къ поверхностямъ уровня. Если мы сопоставимъ эту формулу съ закономъ Джуля (IV), то получимъ законъ Ома (II') или (II).

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

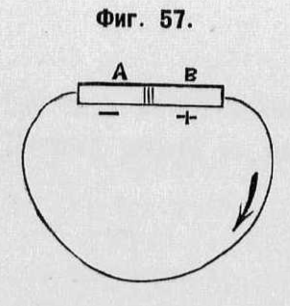
Термоэлектрическіе токи.

Начало Вольты. — Опытъ Зебека. — Опытъ Пельтье.

Начало Вольты.

225. Вольта полагалъ, что достаточно простаго соприкосновенія двухъ металловъ, чтобы они пришли въ различныя электрическія состоянія: при чемъ одинъ заряжается положительнымъ электричествомъ, а другой отрицательнымъ. Гипотеза Вольты и до сихъ поръ принимается большимъ числомъ физиковъ, и она какъ будто бы подтверждается рядомъ опытовъ. Эту гипотезу можно выразить такъ: потенціалъ на каждомъ изъ металловъ A и B, находящихся въ соприкосновеніи, имѣетъ постоянное значеніе, потому что въ каждомъ изъ нихъ существуетъ равновѣсіе; но, эти значенія V_a и V_b неодинаковы. Положимъ, напримѣръ, что $V_b > V_a$. Соединивъ оба эти металла посредствомъ проводящей проволоки, не вводя въ цѣпь другихъ соприкосновеній (фиг. 57), мы получили бы токъ. Однако, этотъ опытъ нельзя произвести при такихъ условіяхъ, потому что неизбѣжно вводимыя въ цѣпь постороннія соприкосновенія уничтожаютъ первое дѣйствіе.

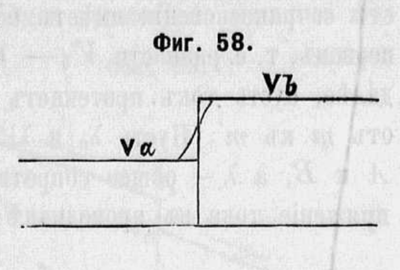
Фиг. 57.



Изобразимъ такое состояніе двухъ соприкасающихся кусковъ двумя горизонтальными линіями V_a и V_b, имѣющими различныя

высоты (фиг. 58). Близь соприкосновенія потенціалъ измѣняется весьма быстро; но, вѣроятно, такое измѣненіе величины потенціала не происходитъ вдругъ, а что онъ измѣняется постепенно между двумя плоскостями, весьма близко лежащими къ раздѣльной,—совершенно такъ, какъ онъ, будучи постояннымъ на каждой изъ обѣихъ обкладокъ лейденской банки изъ тонкаго стекла, постепенно переходитъ отъ одного значенія къ другому между двумя точками, отдѣляющимися только толщиною стекла.

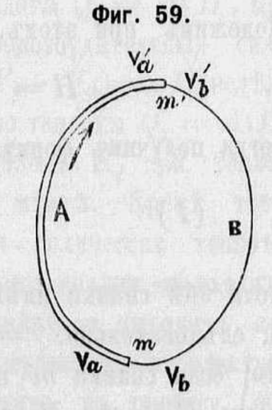
Фиг. 58.



Опытъ Зебека.

226. Электрическая разность уровней, происходящая отъ соприкосновенія двухъ металловъ, существенно зависитъ отъ температуры, и она обыкновенно тѣмъ болѣе, чѣмъ выше температура. Если составить цѣпь изъ двухъ металловъ, спаянныхъ между собою въ двухъ мѣстахъ, то въ ней токъ будетъ протекать только тогда, когда электрическая разность уровней въ обоихъ мѣстахъ соприкосновенія не одинакова. Самое простое средство, сдѣлать неравными разности уровней, заключается въ томъ, что одна изъ спаекъ приводится къ болѣе высокой температурѣ, чѣмъ другая; а въ этомъ-то и состоитъ опытъ Зебека [1]).

Фиг. 59.



Поэтому, пусть A и B будутъ два металла, спаянные между собою въ мѣстахъ m и m' (фиг. 59); первая спайка имѣетъ температуру t, а вторая — болѣе высокую температуру t'; V_a и V'_a— значенія потенціала на металлѣ A въ точкахъ m и m', V_b и V_b'—

[1]) Seebeck, Gilb. Ann. Bd. LXXIII. S. 115 и 430. Pogg. Ann. Bd. VI. S. 1, 133 и 253.

значенія его на металлѣ B въ тѣхъ же самыхъ точкахъ. Положимъ, оба металла имѣютъ такое свойство, что потенціалъ въ мѣстѣ соприкосновенія имѣетъ бо́льшее значеніе на второмъ, чѣмъ на первомъ, т. е. разности $V'_b - V'_a$ и $V_b - V_a$ будутъ положительныя; далѣе, пусть токъ протекаетъ черезъ металлъ A по направленію отъ m къ m'. Пусть λ_a и λ_b будутъ сопротивленія проводниковъ A и B, а λ — общее сопротивленіе $\lambda_a + \lambda_b$ цѣпи. При этомъ напряженіе тока въ проводникѣ A будетъ

$$i = \frac{V_a - V'_a}{\lambda_a}$$

въ проводникѣ же B —

$$i = \frac{V'_b - V_b}{\lambda_b}$$

Такъ какъ обѣ эти величины равны, то, слѣдовательно,

$$i = \frac{V_a - V'_a}{\lambda_a} = \frac{V'_b - V_b}{\lambda_b} = \frac{(V'_b - V'_a) - (V_b - V_a)}{\lambda}$$

Положимъ, при этомъ, что

$$H = V_b - V_a, \quad H' = V'_b - V'_a$$

тогда получимъ формулу:

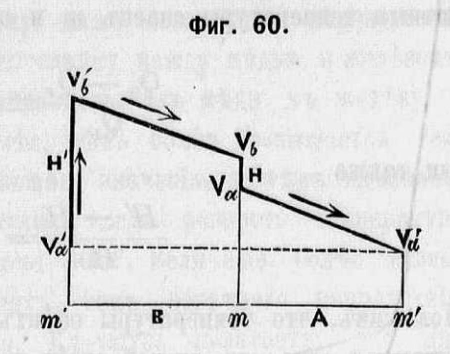
$$(1) \qquad i = \frac{H' - H}{\lambda}$$

Если обѣ спайки имѣютъ одну и туже температуру, то $H = H'$ и, слѣдовательно, $i = 0$, т. е. совершенно не существуетъ тока. Но, если спайка m' имѣетъ высшую температуру, чѣмъ m, то разность H' болѣе H, и токъ проходитъ въ направленіи, означенномъ стрѣлкою.

227. Это явленіе можетъ быть представлено графически слѣдующимъ образомъ. Вообразимъ цѣпь растянутою по прямой $m'mm'$ (фиг. 60). Въ мѣстѣ соприкосновенія m' вѣсъ электричества i поднимается отъ уровня V'_a до уровня V'_b; отсюда онъ падаетъ, какъ по наклонной плоскости, до уровня V_b; отсюда же —

къ мѣсту соприкосновенія отъ уровня V_b до уровня V_a и, по второй наклонной плоскости, снова достигаетъ первоначальнаго уровня V'_a, откуда опять начинаетъ тоже самое движеніе.

Фиг. 60.



Мы видѣли (n^0 221), что работа электровозбудительныхъ силъ между двумя поверхностями уровня въ единицу времени равна произведенію изъ напряженія i тока и разности значеній потенціала на этихъ поверхностяхъ. Эта теорема пригодна во всѣхъ случаяхъ, а, слѣдовательно, также и для двухъ поверхностей уровня, между которыми находится соприкосновеніе, и которыя лежатъ весьма близко другъ отъ друга. Поэтому, работа электровозбудительныхъ силъ вблизи соприкосновенія m' — отрицательная и равна $i(V'_a - V'_b) = -iH'$. Такимъ образомъ, въ этомъ мѣстѣ необходимо поставить внѣшнее тѣло K_2 при температурѣ t', которое въ единицу времени доставляло бы эквивалентное количество теплоты $Q_2 = AiH'$. Наоборотъ, вблизи соприкосновенія m электровозбудительныя силы производятъ положительную работу, равную $i(V_b - V_a) = iH$; вслѣдствіе чего, въ этомъ мѣстѣ появится количество теплоты $Q_1 = AiH$, которое должно быть поглощено внѣшнимъ тѣломъ K_1 при температурѣ t, находящимся въ томъ же самомъ мѣстѣ. Кромѣ того, вдоль проводниковъ A и B производятся количества теплоты $Ai(V_a - V'_a)$ и $Ai(V'_b - V_b)$. И такъ, чрезъ спайку m' входитъ въ цѣпь количество теплоты Q_2, а чрезъ спайку m выходитъ количество теплоты Q_1. Разность $Q_2 - Q_1$ превращается въ электрическую работу, которая сама по себѣ переходитъ въ теплоту, обнаруживающуюся въ замыкающей дугѣ. Ясно, что это количество теплоты $Q_2 - Q_1$ равно тому, которое освобождается въ проводникахъ.

228. Такую комбинацію Клаузіусъ [1]) сравниваетъ съ паровою ма-

[1]) Pogg. Ann. Bd. XC. S. 513, или Abhandl. über d. mech. Wärmetheorie. 2 Abtheilung. Braunschweig, 1867, S. 189.

шиною, въ которой K_2 есть топильное пространство или источникъ теплоты, а K_1 — конденсаторъ или холодильникъ, и прилагаетъ къ ней, по аналогіи, теорему Карно. Если T и T' означаютъ абсолютныя температуры спаекъ m и m', то получимъ:

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{T' - T}{T}$$

или также

$$\frac{H' - H}{H} = \frac{T' - T}{T}$$

Положимъ, что температуры обѣихъ спаекъ безконечно мало отличаются одна отъ другой, такъ что можно принять:

$$T' = T + dT$$
$$H' = H + dH$$

тогда изъ предъидущаго уравненія выходитъ, что

$$\frac{dH}{H} = \frac{dT}{T}$$

$$log\, H = log\,(nT)$$
$$H = nT$$

Коеффиціентъ n есть постоянное число для двухъ данныхъ металловъ. Поэтому, разность электрическихъ уровней, устанавливающаяся въ мѣстахъ соприкосновенія обоихъ металловъ, была бы пропорціональна абсолютной температурѣ въ мѣстахъ соприкосновенія.

Далѣе слѣдуетъ, что

$$H' - H = n\,(T' - T)$$

а потому

$$i = \frac{n\,(T' - T)}{\lambda}$$

Такимъ образомъ, напряженіе тока было бы пропорціонально разности температуръ спаекъ. Дѣйствительно, этотъ законъ подтверждается въ большей части случаевъ для разности температуръ около 50 градусовъ и, какъ исключеніе, — въ болѣе широкихъ предѣлахъ, но не можетъ считаться общимъ.

Извѣстный опытъ, повидимому, даже совершенно опровергаетъ эти результаты. — Если нагрѣть спайку между мѣдью и желѣзомъ, то токъ пройдетъ спайки въ направленіи отъ мѣди къ желѣзу, а напряженіе его будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе возвышается температура; оно достигаетъ наибольшаго значенія, за тѣмъ начинаетъ убывать и дѣлается равнымъ нулю, когда разность температуръ спаекъ составляетъ приблизительно 300°. Если еще болѣе возвышать температуру, то произойдетъ токъ обратнаго направленія. Для объясненія такого уклоненія, Клаузіусъ полагаетъ, что двѣ части одного и того же металла, имѣющія весьма различныя температуры, разнятся въ своихъ физическихъ свойствахъ и, слѣдовательно, относятся между собою какъ два различныхъ металла. Поэтому въ замыкающей дугѣ изъ мѣди или желѣза могутъ произойдти разности уровней, вызывающія измѣненія и производящія даже перемѣну въ направленіи тока.

229. Разсмотримъ теперь цѣпь, состоящую изъ произвольнаго числа металловъ A, B, ... G, спаянныхъ между собою въ m_1, m_2, ... Пусть, при этомъ, токъ имѣетъ направленіе, означенное стрѣлкою (фиг. 61). Назовемъ чрезъ V_a и V'_a значенія потенціала на металлѣ A въ точкахъ m_1 и m_2, чрезъ V_b и V'_b — его значенія на металлѣ B въ m_2 и m_3 и т. д. Какъ прежде, пусть $\lambda_a, \lambda_b, \ldots \lambda_g$ будутъ сопротивленія различныхъ металловъ, а λ — общее сопротивленіе; тогда

Фиг. 61.

$$i = \frac{V_a - V'_a}{\lambda_a} = \frac{V_b - V'_b}{\lambda_b} = \ldots = \frac{V_g - V'_g}{\lambda_g}$$

откуда, сложивъ эти равныя отношенія, получимъ:

$$i = \frac{(V_b - V'_a) + (V_c - V'_b) + \ldots + (V_a - V'_g)}{\lambda}$$

Если положимъ, что

$$H_{ab} = V_b - V'_a, \quad H_{bc} = V_c - V'_b, \ldots\ldots$$

то это уравненіе будетъ:

$$i = \frac{H_{ab} + H_{bc} + \ldots + H_{ga}}{\lambda}$$

или проще

$$(2) \qquad i = \frac{\Sigma H}{\lambda}$$

Электрическія разности уровней H въ спайкахъ будутъ или положительныя, или отрицательныя. Если алгебраическая сумма положительная, то токъ пойдетъ въ направленіи, означенномъ стрѣлкою; напротивъ, если она отрицательная, — токъ пойдетъ въ противоположномъ направленіи.

Алгебраическая сумма количествъ теплоты, поглощенныхъ или освобожденныхъ въ площадяхъ соприкосновенія металловъ, будетъ

$$Q = Ai\,\Sigma H = A\lambda i^2$$

она равна тому количеству теплоты, которое освобождается вдоль всей цѣпи (n^0 222). Опытъ показываетъ, что если всѣ спайки имѣютъ одну и туже температуру, то тока не существуетъ [1]), и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ $\Sigma H = 0$, а потому и $Q = 0$.

Опытъ Пельтье.

230. Разсмотримъ часть проводника, состоящаго изъ двухъ металловъ A и B, соприкасающихся въ точкѣ m (фиг. 62), и пусть черезъ него проходитъ токъ, происшедшій отъ какой нибудь причины. Далѣе, пусть V_1 и V_2 будутъ значенія потенціала на концахъ проводника, V_a и V_b—значенія его на обоихъ проводникахъ въ

Фиг. 62.

[1]) Becquerel, Pogg. Ann. Bd. XVII. S. 545.

мѣстѣ соприкосновенія; тогда получимъ:

$$i = \frac{V_1 - V_a}{\lambda_a} = \frac{V_b - V_2}{\lambda_b}$$

и, слѣдовательно,

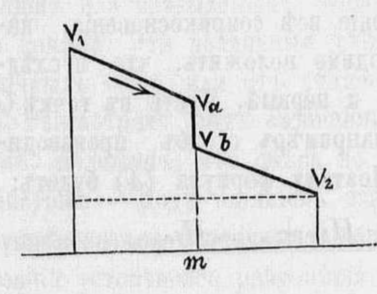
$$(3) \qquad i = \frac{(V_1 - V_2) + (V_b - V_a)}{\lambda}$$

Если разность уровней $V_b - V_a$ отрицательная, какъ на фиг. 63, то въ мѣстѣ соприкосновенія произойдетъ паденіе электричества и, при томъ, будетъ произведена положительная работа, или количество теплоты $Ai(V_a - V_b)$.

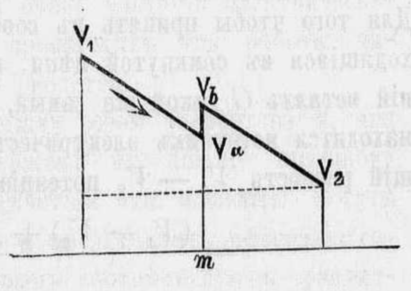
Если внѣшнее охлаждающее тѣло не будетъ постоянно отнимать этой теплоты, то спайка нагрѣется, и такое явленіе давно уже было наблюдено.

Напротивъ, если разность $V_b - V_a$ положительная, какъ на фиг. 64, то поднятіе электрическаго вѣса i отъ уровня V_a до

Фиг. 63.



Фиг. 64.

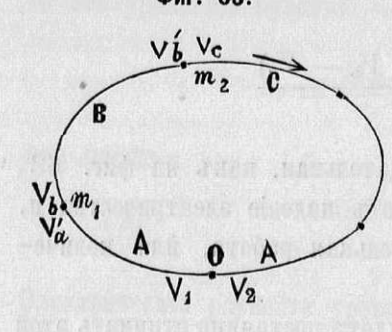


уровня V_b потребуетъ расхода теплоты, равнаго $Ai(V_b - V_a)$. Если спайка не находится въ сообщеніи съ источникомъ теплоты, постоянно доставляющимъ ей это количество, то теплота отнимается отъ самаго проводника, и въ спайкѣ наступаетъ пониженіе температуры. Въ этомъ-то и состоитъ явленіе, наблюденное Пельтье и долго остававшееся безъ объясненія [1]).

[1]) Peltier, Pogg. Ann. Bd. XLIII. S. 324. v. Quintus Icilius, Pogg. Ann. Bd. LXXXIX. S. 377.

231. Разсмотримъ теперь болѣе общій случай, когда цѣпь состоитъ изъ нѣсколькихъ металловъ $A, B, C, \ldots G$, соприкасающихся въ $m_1, m_2, \ldots$ (фиг. 65), и пропустимъ черезъ этотъ проводникъ электрическій токъ, происшедшій отъ какой нибудь причины. Назовемъ чрезъ V_1 и V_2 значенія потенціала на обоихъ концахъ цѣпи, чрезъ V'_a — значеніе его на металлѣ A въ точкѣ соприкосновенія m_1, чрезъ V_b и V'_b — значенія потенціала на металлѣ B въ m_1 и m_2 и т. д. При этомъ получимъ:

Фиг. 65.



$$i = \frac{V_1 - V'_a}{\lambda_a} = \frac{V_b - V'_b}{\lambda_b} = \ldots = \frac{V_g - V_2}{\lambda_g}$$

и, слѣдовательно,

$$i = \frac{(V_1 - V_2) + H_{ab} + H_{bc} + \ldots . H_{fa}}{\lambda} \quad (4)$$

Для того чтобы принять въ соображеніе всѣ соприкосновенія, находящіяся въ сомкнутой цѣпи, необходимо положить, что послѣдній металлъ G такой же самый, какъ и первый. Пусть въ точкѣ O находится источникъ электричества, напримѣръ столбъ, производящій разность $V_1 - V_2$ потенціала. Поэтому формула (4) будетъ:

$$i = \frac{(V_1 - V_2) + H_{ab} + H_{bc} + \ldots . H_{fa}}{\lambda}$$

или проще

$$i = \frac{V_1 - V_2 + \Sigma H}{\lambda} \quad (5)$$

При этомъ предполагается, что сопротивленіемъ гальваническаго столба можно пренебречь.

Если въ сомкнутой цѣпи всѣ соприкосновенія имѣютъ одну и туже температуру, то (n^0 229) $\Sigma H = 0$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и алгебраическая сумма пріобрѣтенныхъ спайками количествъ теплоты также равна нулю. Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ, напряженіе тока такое же, какъ и при отсутствіи соприкосновеній.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Электрохимическія явленія.

Разсматриваніе мѣры химическихъ дѣйствій. — Электролиты и электролизеры. — Электрохимическіе эквиваленты. — Теорія столба.

Мѣра химическихъ дѣйствій.

232. Химическія дѣйствія постоянно сопровождаются освобожденіемъ или связываніемъ теплоты, а очень часто и электрическими токами. Эти различныя дѣйствія происходятъ отъ работы частичныхъ силъ, или отъ химическаго сродства.

Разсмотримъ рядъ смѣшанныхъ между собою элементовъ и, при томъ, положимъ, что смѣсь не подвержена ни какому внѣшнему дѣйствію. — Подъ вліяніемъ взаимнодѣйствія эти элементы могутъ группироваться различнымъ образомъ и представлять нѣсколько состояній устойчиваго равновѣсія, которымъ соотвѣтствуютъ различные minimum-ы потенціальной энергіи. Въ основаніи природы существуетъ, что внутреннія силы производятъ положительную работу. Поэтому, если система переходитъ изъ одного состоянія равновѣсія въ другое, то постоянно происходитъ уменьшеніе потенціальной энергіи, а освобождаемое при этомъ количество теплоты, предполагая, что система снова приняла туже самую температуру, эквивалентно работѣ внутреннихъ силъ или уменьшенію потенціальной энергіи. Наоборотъ, чтобы снова перевести систему изъ втораго состоянія въ первое, — необходимо сообщить ей количество теплоты, соотвѣтствующее приращенію потенціальной энергіи. Отсю-

да слѣдуетъ, что мѣрою химическаго дѣйствія можетъ быть принято то количество тепловой энергіи, которое освобождается, или связывается при измѣненіи состоянія.

Между различными состояніями равновѣсія есть одно особенно замѣчательное, а именно то, при которомъ потенціальная энергія равна нулю. Это есть самое устойчивое равновѣсіе, и если система приняла его, то она болѣе не можетъ претерпѣвать ни какихъ измѣненій отъ дѣйствія однѣхъ только внутреннихъ силъ. Для того чтобы она вышла изъ этого состоянія, — необходимо сообщить ей извѣстное количество тепловой энергіи.

Явленія будутъ еще болѣе сложны, когда система подвержена внѣшнимъ силамъ, напримѣръ равномѣрному давленію, — что обыкновенно и случается; тогда различныя состоянія равновѣсія, которыя можетъ принимать система, будутъ зависѣть отъ этого давленія. Если при измѣненіи, т. е. при переходѣ изъ одного состоянія равновѣсія въ другое, система снова приметъ туже самую температуру, то измѣненіе потенціальной энергіи будетъ равно пріобрѣтенному или отданному этою системою количеству тепловой энергіи, плюсъ работѣ, соотвѣтствующей внѣшнему давленію.

Химическія соединенія обыкновенно сопровождаются отдѣленіемъ теплоты и уменьшеніемъ объема. При этомъ происходитъ уменьшеніе потенціальной энергіи, равное избытку произведенной тепловой энергіи надъ работою давленія.

Разложенія же обыкновенно совершаются при помощи поглощенія теплоты, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, происходитъ увеличеніе объема. При этомъ является приращеніе потенціальной энергіи, равное избытку пріобрѣтенной тепловой энергіи надъ внѣшнею работою, произведенною тѣломъ при его расширеніи. Однако, бываютъ соединенія, при которыхъ происходитъ поглощеніе теплоты, и разложенія, при которыхъ она освобождается.

Электролиты и электролизеры. — Электрохимическіе эквиваленты.

233. Разсматриваніе количествъ теплоты, освобождающихся или поглощающихся при химическихъ процессахъ и при электрическихъ

токахъ, приводитъ насъ къ отношенію между явленіями и къ установленію приличной общей мѣры для этихъ двухъ классовъ явленій. Положимъ, что въ жидкости, состоящей изъ раствора сложнаго тѣла, проходитъ постоянный электрическій токъ. Подъ вліяніемъ его растворъ разлагается, и составныя части уносятся въ противоположномъ направленіи. При этомъ разложеніи поглощается извѣстное количество теплоты, которое производится токомъ, т. е. работою электрическихъ силъ. Если Q есть теплота, поглощаемая при химическомъ явленіи въ единицу времени, а H—уменьшеніе потенціала или электрическаго уровня въ томъ мѣстѣ, гдѣ происходитъ это явленіе, то работа электрическихъ силъ будетъ Hi, и потому получимъ уравненіе:

$$EQ = Hi \tag{1}$$

гдѣ E означаетъ механическій эквивалентъ теплоты [1]).

Наоборотъ, если два тѣла могутъ вступить между собою въ соединеніе, находясь въ жидкости, въ которой протекаетъ токъ, то соединеніе происходитъ; при этомъ освобождается извѣстное количество теплоты, слѣдствіемъ чего бываетъ повышеніе электрическаго уровня въ томъ мѣстѣ, гдѣ совершается соединеніе. Количество теплоты Q, освобождающееся при химическомъ процессѣ въ единицу времени, и повышеніе H потенціала связаны между собою отношеніемъ $EQ = Hi$. Это уравненіе можно примѣнить къ обоимъ разбираемымъ здѣсь случаямъ, если смотрѣть на химическое явленіе какъ на положительное или какъ на отрицательное, т. е. будетъ ли при немъ теплота освобождаться или поглощаться, и принимая измѣненіе потенціала въ направленіи тока положительнымъ или отрицательнымъ, смотря потому, произойдетъ ли повышеніе его, или пониженіе.

234. **Первый опытный законъ.** — **Вѣсъ разложенныхъ или соединенныхъ количествъ сложнаго тѣла въ равныя времена пропорціоналенъ напряженію тока.** — Очевидно, что поглощенная или освобожденная

[1]) Thomson, Philosophical Magazine, S. IV. Vol. II. p. 429 и 551.

теплота пропорціональна вѣсу разложенныхъ или соединенныхъ составныхъ частей, а потому, на основаніи предъидущаго закона, она пропорціональна также и напряженію тока. Но, такъ какъ это количество теплоты въ единицу времени равно AHi, то отсюда заключаемъ, что разность уровней H есть постоянная величина для всякаго сложнаго тѣла. Такимъ образомъ электролитъ или электролизеръ играютъ роль соприкосновенія двухъ различныхъ металловъ: они производятъ при данной температурѣ и при данномъ давленіи опредѣленное измѣненіе H потенціала. Вѣроятно, разность H зависитъ отъ температуры, совершенно такъ, какъ это существуетъ при соприкосновеніи двухъ металловъ, и что она измѣняется также вмѣстѣ съ внѣшнимъ давленіемъ.

235. Второй опытный законъ. Пропуская послѣдовательно одинъ и тотъ же токъ черезъ рядъ различныхъ химическихъ соединеній, содержавшихся въ сосудахъ, Фарадей нашелъ, что вѣса разложенныхъ количествъ пропорціональны химическимъ эквивалентамъ этихъ соединеній. Если въ электролитѣ выдѣляется изъ соли эквивалентъ кислоты, то онъ выдѣляется и въ другомъ электролитѣ. Такимъ образомъ, съ этой точки зрѣнія, соли слѣдуетъ выражать формулами, не содержащими эквивалента основанія или окисла, а заключающими эквивалентъ кислоты или металлоида, который ее заступаетъ *). Законъ Фарадея согласуется вообще съ обыкновенными химическими эквивалентами; однако, для извѣстныхъ тѣлъ необходимо удвоивать вѣсъ химическаго эквивалента, или дѣлить его на два.

Тотъ же самый законъ пригоденъ и для электролизеровъ, т. е. для такихъ тѣлъ, составныя части которыхъ вступаютъ въ соединеніе при прохожденіи электрическаго тока. Обобщая законъ Фарадея, электрохимическій эквивалентъ любаго тѣла можно опредѣлить такъ: онъ есть тотъ вѣсъ тѣла, который соединяется или разлагается въ единицу времени при единичномъ напряженіи тока.

*) Здѣсь авторъ указываетъ, конечно, на недостатокъ дуалистической системы въ химіи, по которой соль представлялась сочетаніемъ окисла металла (основанія) и кислоты, или, вѣрнѣе сказать, ангидрита кислоты. Такъ, напримѣръ, мѣдный купоросъ изображался формулою $CuO.SO_3$, вмѣсто принятаго нынѣ обозначенія $Cu\,SO_4$, при употребленіи паевъ Каницаро. Въ настоящее же время, при измѣненіи теоретическаго взгляда на происхожденіе солей, формулы дуалистической системы оставлены почти всѣми.

Примѣч. перев.

Теорія столба.

236. Разсмотримъ элементъ гальваническаго столба, дѣйствіе котораго поддерживается раствореніемъ цинка въ какой нибудь жидкости. Означимъ чрезъ q количество теплоты, происходящее отъ растворенія одного килограмма цинка въ жидкости, и чрезъ a — его электрохимическій эквивалентъ, т. е. тотъ вѣсъ цинка, который растворяется въ единицу времени при прохожденіи тока единичнаго напряженія. Если напряженіе тока равно i, то вѣсъ растворившагося цинка будетъ ai, а соотвѣтствующее химическое дѣйствіе $Eqai$. Если столбъ состоитъ изъ n послѣдовательно введенныхъ элементовъ, по которымъ проходитъ одинъ и тотъ же токъ, то химическое дѣйствіе будетъ $nEaqi$.

Положимъ, что оба полюса столба соединены однородною проводящею проволокою, имѣющею вездѣ по всей своей длинѣ одну и туже температуру. Означимъ λ' сопротивленіе этой проволоки, а λ'' — сопротивленіе каждаго элемента столба; тогда общее сопротивленіе цѣпи будетъ $\lambda = \lambda' + n\lambda''$. Если мы положимъ химическое дѣйствіе столба равнымъ тому количеству тепловой энергіи, которое освобождается въ замкнутой цѣпи, то получимъ уравненіе:

$$naEq\,i = \lambda\,i^2 \qquad (2)$$

откуда слѣдуетъ, что

$$i = \frac{naEq}{\lambda}$$

или

$$i = \frac{naEq}{\lambda' + n\lambda''} \qquad (3)$$

При этомъ легко видѣть, что напряженіе тока не возрастаетъ

до безконечности, когда число элементовъ безконечно велико, а приближается къ предѣлу. Поэтому, для весьма большаго числа элементовъ получимъ:

$$i = \frac{aEq}{\lambda''} \qquad (4)$$

Напротивъ того, если число элементовъ не очень велико, а сопротивленіе $n\lambda''$ столба весьма мало, сравнительно съ сопротивленіемъ соединяющей проволоки, то приблизительно получимъ:

$$i = \frac{naEq}{\lambda'} \qquad (5)$$

т. е. при этомъ напряженіе почти пропорціонально числу элементовъ.

237. Мы можемъ весьма легко прослѣдить на этомъ аппаратѣ измѣненія потенціала. Для простоты, положимъ, что химическое дѣйствіе каждаго элемента столба происходитъ на одной изъ его боковыхъ поверхностей, напримѣръ, на первой по направленію тока (фиг. 66); тогда въ этомъ мѣстѣ будетъ повышеніе уровня, опредѣляемое уравненіемъ $Eqai = hi$; отсюда слѣдуетъ, что $h = aEq$. Но, токъ, проходя слой жидкости, наполняющей сосудъ, претерпѣваетъ уменьшеніе уровня $\lambda'' i$, такъ что, слѣдовательно, все повышеніе его, произведенное первымъ элементомъ, равно разности $aEq - \lambda'' i$, а повышеніе, произведенное всѣмъ столбомъ, будетъ $naEq - n\lambda'' i$. Поэтому, если V_1 будетъ значеніе потенціала на положительномъ полюсѣ столба, V_2 — значеніе его на отрицательномъ полюсѣ, то

Фиг. 66.

$$V_1 - V_2 = naEq - n\lambda'' i$$

Потенціалъ уменьшается вдоль проволоки отъ положительнаго полюса къ отрицательному. Повышеніе $naEq$, происходящее отъ химическихъ дѣйствій, въ физикѣ называется электровозбудительною силою столба. Если положить эту величину равною потерѣ уровня, происшедшей отъ сопротивленія всей цѣпи, то

$$naEq = \lambda i = (\lambda' + n\lambda'') i$$

и опять получимъ уравненіе (3).

238. Теперь положимъ, что въ какое нибудь мѣсто проводника введенъ электролитъ, и пусть a' будетъ электрохимическій эквивалентъ сложнаго тѣла, находящагося въ растворѣ, а q' — количество теплоты, которое необходимо для разложенія 1 килограмма этого тѣла; тогда вѣсъ количества, разложеннаго въ единицу времени, будетъ $a'i$, а поглощенная при этомъ теплота — $a'q'i$. Такъ какъ химическое дѣйствіе столба равно тепловой энергіи, освобождающейся во всей замкнутой цѣпи, плюсъ той энергіи, которая служила для разложенія электролита, то получимъ уравненіе:

$$naEqi = \lambda i^2 + a'Eq'i$$

гдѣ λ означаетъ сопротивленіе всей цѣпи, включая и электролитъ. Отсюда слѣдуетъ, что

$$i = \frac{E(naq - a'q')}{\lambda} \qquad (6)$$

Замѣтимъ поэтому, что присутствіе электролитовъ имѣетъ слѣдствіемъ уменьшеніе напряженія тока, такъ какъ они въ каждомъ мѣстѣ производятъ пониженіе электрическаго уровня. Отсюда мы видимъ, что если вообще существуетъ токъ, то необходимо должно быть выполнено условіе: $naq > a'q'$, т. е. химическое дѣйствіе столба должно быть болѣе химическаго дѣйствія электролитовъ, что и подтверждается опытомъ. Если увеличить число элементовъ, изъ которыхъ состоитъ столбъ, то всегда можно произвести разложеніе.

239. Если ввести въ цѣпь нѣсколько электролитовъ и означить черезъ a', a'', ... ихъ электрохимическіе эквиваленты, а черезъ q', q'', ... — количества теплоты, необходимыя для разложенія 1 килограмма этихъ различныхъ тѣлъ, то получимъ также:

$$naEqi = \lambda i^2 + a'Eq'i + a''Eq''i + \ldots.$$

откуда слѣдуетъ, что

$$i = \frac{E[naq - (a'q' + a''q'' + \ldots)]}{\lambda}$$

При этомъ все сопротивленіе λ цѣпи состоитъ изъ сопротивленій столба, проводящей проволоки и сопротивленій $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ различныхъ электролитовъ; поэтому

$$\lambda = \lambda' + n\lambda'' + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$$

Для того чтобы токъ существовалъ, необходимо

$$naq > a'q' + a''q'' + \ldots$$

т. е. химическое дѣйствіе столба должно быть болѣе суммы химическихъ дѣйствій электролитовъ.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Электродинамика.

Предварительныя замѣчанія. — Приведеніе двухъ неизвѣстныхъ функцій къ одной. — Дѣйствіе сомкнутаго тока на элементъ тока. — Дѣйствіе элементарнаго тока на элементъ тока. — Дѣйствіе соленоида на элементъ тока. — Формула Ампера.

Предварительныя замѣчанія.

240. Припомнимъ сначала тѣ принципы, на которыхъ основывается теорія электродинамическихъ явленій. Амперъ [1]), создавшій эту теорію, принялъ, что дѣйствіе двухъ линейныхъ токовъ слагается изъ дѣйствій элемента на элементъ, что взаимнодѣйствіе двухъ элементовъ тока есть сила притяженія или отталкиванія, направленіе которой совпадаетъ съ линіей, соединяющей эти элементы, а величина ея пропорціональна произведенію изъ длинъ элементовъ, произведенію изъ напряженій токовъ и, сверхъ того, зависитъ отъ ихъ разстоянія. Въ этомъ и заключается основная гипотеза теоріи. Кромѣ того, онъ принялъ слѣдующія два начала, доказываемыя опытомъ: 1) опытъ показываетъ, что если измѣнить направленіе тока, то сила измѣнитъ свой знакъ, т. е. если она сначала была

[1]) Ampére, Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes electrodynamiques. Mémoires de l'académie de Paris, T. VI, 1823.
W. Weber, Electrodynamische Maassbestimmungen. I. Theil. Leipzig, 1846.

притяженіемъ, то при этомъ сдѣлается отталкиваніемъ, и наоборотъ; 2) далѣе, опытъ показываетъ, что дѣйствіе сомкнутаго тока, состоящаго изъ прямолинейной части и изъ извилистой или криволинейной такой же величины, — при чемъ отдѣльные элементы послѣдней удаляются весьма мало отъ первой, — очень не велико, сравнительно съ дѣйствіемъ прямолинейной части. Отсюда слѣдуетъ, что элементъ тока можно замѣнить его проэкціями на три любыя оси.

241. Кромѣ того, воспользуемся теоретическимъ закономъ симметріи. Очевидно, что взаимное дѣйствіе двухъ элементовъ тока зависитъ отъ ихъ относительнаго положенія. Поэтому, если разсматривать элементы, симметрично лежащіе къ плоскости съ двумя данными, то сила, развивающаяся между послѣдними двумя, также будетъ симметрична съ тою силою, которая развивается между двумя симметричными элементами.

Отсюда слѣдуетъ, что взаимное дѣйствіе двухъ элементовъ ab и cd, изъ которыхъ ab лежитъ въ плоскости, проходящей черезъ середину cd и перпендикулярной къ этому элементу, равно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что построены элементы, симметрично лежащіе къ этой плоскости. Элементъ ab симметриченъ самъ съ собою, а элементъ cd имѣетъ противоположныя направленія; поэтому, вслѣдствіе перваго опытнаго начала, сила должна была бы принять противоположное направленіе; а такъ какъ она находится въ этой плоскости, то, слѣдовательно, симметрична сама съ собою и направленія своего не измѣнитъ; отсюда заключаемъ, что она равна нулю.

242. Разсмотримъ теперь два любые элемента ab и cd (фиг. 67). Если мы проведемъ прямую mn, соединяющую ихъ середины, то элементъ ab можемъ замѣнить двумя его составляющими $a'b'$ и $a''b''$, изъ которыхъ первая направлена по прямой mn, а вторая къ ней перпендикулярна и лежитъ въ плоскости bmn. Такимъ же образомъ разложимъ и элементъ cd на двѣ составляющія $c'd'$ и c_1d_1, изъ которыхъ первая направлена по mn, а вторая, къ ней перпендикулярная, лежитъ въ плоскости dnm. Далѣе, разложимъ элементъ c_1d_1, лежащій въ плоскости перпендикулярной къ mn и проходящей черезъ точку n, на двѣ составляющія, изъ которыхъ одна $c''d''$ параллельна $a''b''$, а другая $c'''d'''$ перпендикулярна къ $c''d''$. Такимъ образомъ элементъ cd замѣнится тремя элементами $c'd'$, $c''d''$ и $c'''d'''$. Для того, чтобы опредѣлить взаимное дѣйствіе двухъ элементовъ ab и cd, намъ нужно найти только дѣйствіе двухъ элементовъ $a'b'$ и $a''b''$ на каждый изъ трехъ $c'd'$, $c''d''$ и $c'''d'''$. Изъ шести дѣйствій, которыя намъ нужно разсмотрѣть, четыре равны нулю. 1) Элементъ $a'b'$ лежитъ въ плоскости перпендикулярной къ $c''d''$ и проходящей черезъ его середину; поэтому взаимное дѣйствіе двухъ элементовъ $a'b'$ и $c''d''$ равно нулю. 2) Тотъ же самый элементъ $a'b'$ лежитъ въ плоскости перпендикулярной къ $c'''d'''$ и проходящей чрезъ его середину; слѣдовательно, взаимное дѣйствіе элементовъ $a'b'$ и $c'''d'''$ будетъ нуль. 3) Элементъ $c'd'$ лежитъ въ плоскости перпендикулярной къ $a''b''$ и проходящей чрезъ его середину; поэтому взаимное дѣйствіе элементовъ $a''b''$ и $c'd'$ равно нулю. 4) Элементъ $c'''d'''$ лежитъ въ той же самой плоскости, а потому взаимное дѣйствіе элементовъ $a''b''$ и $c'''d'''$ равно нулю. Такимъ образомъ остается только найти еще дѣйствіе двухъ элементовъ $a'b'$ и $c'd'$, лежащихъ на одной и той же прямой, и дѣйствіе двухъ параллельныхъ элементовъ $a''b''$, $c''d''$.

Фиг. 67.

243. Означивъ чрезъ ds и ds' длины двухъ элементовъ тока, чрезъ i и i' — напряженія, а чрезъ r — разстояніе, мы выразимъ взаимное дѣйствіе этихъ двухъ элементовъ посредствомъ

$$ii'\, ds\, ds'\, F(r)$$
$$ii'\, ds\, ds'\, f(r)$$

если они лежатъ на одной и той же прямой линіи, или параллельны между собою. При этомъ обѣ функціи $F(r)$ и $f(r)$ — положительныя или отрицательныя, смотря потому, будутъ ли силы притягательныя или отталкивательныя.

Элементы ab и cd, длины которыхъ ds и ds', а напряженія—

i и i', имѣютъ какое угодно положеніе. Пусть θ и θ' будутъ углы, составляемые направленіемъ тока въ этихъ двухъ элементахъ съ однимъ и тѣмъ же направленіемъ соединяющей ихъ линіи mn; далѣе, пусть φ будетъ уголъ наклоненія между двумя плоскостями bmn и dnm, а r—разстояніе mn; тогда четыре величины $r, \theta, \theta', \varphi$ опредѣлятъ относительное положеніе этихъ двухъ элементовъ, и получимъ:

$$a'b' = ds \cos\theta, \quad a''b'' = ds \sin\theta$$
$$c'd' = ds' \cos\theta', \quad c''d'' = ds' \sin\theta' \cos\varphi, \quad c'''d''' = ds' \sin\theta' \sin\varphi$$

Такимъ образомъ, взаимное дѣйствіе двухъ элементовъ $a'b'$ и $c'd'$, лежащихъ на одной и той же прямой mn, выразится посредствомъ

$$ii'\, ds\, ds'\, F(r) \cos\theta \cos\theta'$$

Дѣйствіе же двухъ параллельныхъ элементовъ $a''b''$ и $c''d''$ — посредствомъ

$$ii'\, ds\, ds'\, f(r) \sin\theta \sin\theta' \cos\varphi$$

Взаимное притяженіе двухъ разсматриваемыхъ элементовъ ab и cd слагается изъ двухъ предъидущихъ дѣйствій, а потому опредѣлится формулою:

$$(1) \quad F = ii'\, ds\, ds' \left[F(r) \cos\theta \cos\theta' + f(r) \sin\theta \sin\theta' \cos\varphi\right]$$

Уголъ наклоненія φ можно выразить въ углѣ ε, составляемомъ двумя направленіями токовъ въ обоихъ разсматриваемыхъ элементахъ ab и cd, а именно:

$$\cos\varepsilon = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos\varphi$$

поэтому предъидущая формула будетъ:

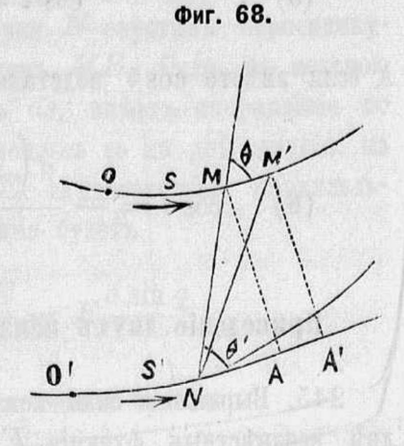
$$(2) \quad F = ii'\, ds\, ds' \left[f(r) \cos\varepsilon + \left(F(r) - f(r)\right) \cos\theta \cos\theta'\right]$$

Чтобы опредѣлить углы θ и θ', можно принять произвольно положительнымъ или направленіе mn, или nm, потому что углы θ и θ' можно замѣнить ихъ пополненіями, не измѣняя этимъ формулы.

244. Прежде чѣмъ идти дальше, выведемъ еще нѣсколько фор-

мулъ, которыя будутъ полезны намъ при послѣдующемъ разсужденіи. Разсмотримъ два тока, движущіеся по направленіямъ стрѣлокъ (фиг. 68) въ двухъ линейныхъ проводникахъ какого нибудь вида. Пусть M и N будутъ середины двухъ элементовъ ds и ds' этихъ токовъ, и возьмемъ на проводникахъ двѣ неподвижныя точки O и O'. При этомъ положеніе точки M на первомъ проводникѣ опредѣлится дугою OM, которую означимъ черезъ s, а положеніе точки N на второмъ проводникѣ — дугою $O'N$, которую означимъ чрезъ s'.

Фиг. 68.



Ясно, что разстояніе r двухъ точекъ M и N есть функція двухъ перемѣнныхъ независимыхъ s и s', и получимъ:

$$(3) \quad \cos\theta = \frac{dr}{ds}$$

$$(4) \quad \cos\theta' = -\frac{dr}{ds'}$$

Съ другой стороны, проэкція NA прямой NM на касательную въ N равна

$$NA = r\cos\theta'$$

Если измѣнять s, оставляя въ тоже время s' постояннымъ, то точка M придетъ въ M', а проэкція NA' прямой NM' будетъ:

$$NA' = r\cos\theta' + \frac{d(r\cos\theta')}{ds}\, ds$$

откуда слѣдуетъ, что

$$AA' = \frac{d(r\cos\theta')}{ds}\, ds$$

Но длина AA' есть проэкція элемента $MM' = ds$ на касательную въ N, а потому также

$$AA' = ds\cos\varepsilon$$

Такимъ образомъ выходитъ, что

$$(5) \qquad \cos\varepsilon = \frac{d\,(r\cos\theta')}{ds}$$

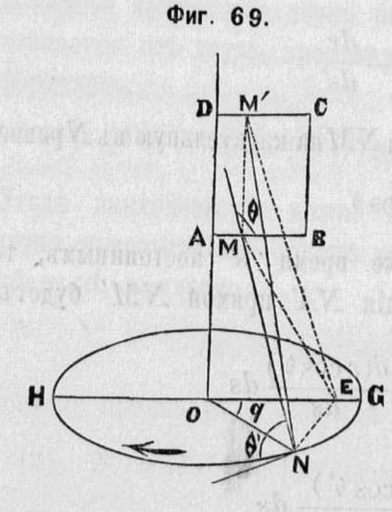
А если вмѣсто $\cos\theta'$ подставить его значеніе (4), то будетъ:

$$(6) \qquad \cos\varepsilon = -\frac{d\left(r\frac{dr}{ds'}\right)}{ds} = -\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2r}{ds\,ds'}$$

Приведеніе двухъ неизвѣстныхъ функцій къ одной.

245. Выраженіе силы между двумя элементами тока содержитъ двѣ неизвѣстныя функціи $F(r)$ и $f(r)$. Для опредѣленія ихъ воспользуемся двумя случаями равновѣсія, которые опредѣляются наблюденіемъ. Для простоты вычисленія, Амперъ принялъ, что обѣ функціи имѣютъ видъ $\frac{A}{r^n}$ и $\frac{B}{r^n}$; мы же поставимъ вопросъ общнѣе, прилагая остроумный методъ, придуманный Бланше, и съ помощью котораго онъ разсматриваетъ этотъ предметъ въ Ecole Normale [1]).

Фиг. 69.



Первый случай равновѣсія, которымъ мы воспользуемся, есть слѣдующій: прямоугольный токъ $ABCD$ (фиг. 69), могущій вращаться около одной изъ своихъ сторонъ AD, находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ круговаго тока, центръ котораго O совпадаетъ съ направленіемъ оси вращенія, а плоскость его перпендикулярна къ этой оси. Пусть GH будетъ линія пересѣченія плоскости прямоугольника съ площадью круга, M и N — середины двухъ элементовъ ds и ds' обоихъ токовъ; далѣе, пусть a будетъ радіусъ круга, q — уголъ GON, u — разстояніе точки M отъ оси. Изъ точки N опустимъ перпендикуляръ NE на діаметръ GH и проведемъ ME. Сила, съ которою дѣйствуетъ элементъ ds' на элементъ ds, имѣетъ направленіе по MN, если она притягательная. Разложимъ ее на двѣ другія: на ME и на перпендикулярную къ ME, слѣдовательно, параллельную EN. Эта послѣдняя составляющая будетъ

$$F\cos MNE = F\frac{NE}{r} = F\frac{a\sin q}{r}$$

а моментъ силы F относительно оси вращенія будетъ

$$F\frac{a\sin q}{r}\times u$$

Равновѣсіе требуетъ, чтобы сумма моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на прямоугольный токъ, была равна нулю, т. е. чтобы

$$\Sigma\,\Sigma\,\frac{Fu\sin q}{r} = 0$$

246. Проэктируя сомкнутую фигуру $NMAON$ на касательную въ N, получимъ:

$$r\cos\theta' + u\sin q = 0 \quad \text{или} \quad r\cos\theta' = -u\sin q$$

Такъ какъ уголъ q не зависитъ отъ s, а разстояніе u не зависитъ отъ s', то уравненіе (5) будетъ

$$\cos\varepsilon = -\frac{d\,(u\sin q)}{ds} = -\frac{du}{ds}\sin q$$

и выраженіе (2) для силы F приметъ видъ:

$$F = -ii'\,ds\,ds'\left[f(r)\frac{du}{ds}\sin q + \frac{F(r)-f(r)}{r}u\frac{dr}{ds}\sin q\right]$$

[1]) Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure, t. II.

Далѣе, $ds' = a dq$, и, слѣдовательно, уравненіе равновѣсія будетъ:

$$(7) \quad \iint \left[\frac{f(r)}{r} \frac{du}{ds} + \frac{F(r)-f(r)}{r^2} u \frac{dr}{ds} \right] u \sin^2 q \, ds \, dq = 0$$

при чемъ s и q приняты за перемѣнныя независимыя, а двойной интегралъ, съ одной стороны, простирается на прямоугольникъ, а съ другой — на всю окружность круга. Ясно, что сторона AD прямоугольника не имѣетъ вліянія на результатъ. — Разсмотримъ сначала первую часть:

$$\iint \frac{f(r)}{r} \frac{du}{ds} u \sin^2 q \, ds \, dq = \int \sin^2 q \, dq \int \frac{f(r)}{r} u \frac{du}{ds} ds$$

Длина s относится къ прямоугольнику, имѣетъ началомъ A и возрастаетъ въ направленіи тока. Вдоль BC будетъ $\frac{du}{ds} = 0$, по AB-же $\frac{du}{ds} = 1$ и по CD, наконецъ, $\frac{du}{ds} = -1$. Поэтому, если означимъ чрезъ r и r' разстоянія NM и NM' отъ точки N до двухъ элементовъ, середины которыхъ M и M' лежатъ на параллели къ AD, и если b будетъ длина стороны AB, то получимъ:

$$\int \frac{f(r)}{r} u \frac{du}{ds} ds = \int_0^b \left[\frac{f(r)}{r} - \frac{f(r')}{r'} \right] u \, du$$

и, слѣдовательно, первая часть будетъ:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 q \, dq \int_0^b \left[\frac{f(r)}{r} - \frac{f(r')}{r'} \right] u \, du$$

247. Разсмотримъ теперь вторую часть:

$$\int \sin^2 q \, dq \int \frac{F(r)-f(r)}{r^2} u^2 \frac{dr}{ds} ds$$

Вмѣсто этого можно написать:

$$\int \sin^2 q \, dq \int \psi'(r) u^2 \frac{dr}{ds} ds$$

если, для сокращенія, положить

$$(8) \quad \frac{F(r)-f(r)}{r^2} = \psi'(r)$$

Интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\int u^2 \psi'(r) \frac{dr}{ds} ds = \Big[u^2 \psi(r) \Big]_1^2 - 2 \int \psi(r) u \frac{du}{ds} ds$$

Такъ какъ оба предѣла совпадаютъ, то первый членъ равенъ нулю, а второй, послѣ того что мы сказали выше, будетъ

$$-2 \int_0^b \Big[\psi(r) - \psi(r') \Big] u \, du$$

и, слѣдовательно, для второй части получимъ:

$$-2 \int_0^{2\pi} \sin^2 q \, dq \int_0^b \Big[\psi(r) - \psi(r') \Big] u \, du$$

А если положимъ, что

$$(9) \quad \frac{f(r)}{r} - 2\psi(r) = \chi(r)$$

то уравненіе равновѣсія сведется на

$$(10) \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 q \, dq \int_0^b \Big[\chi(r) - \chi(r') \Big] u \, du = 0$$

Отсюда заключаемъ, что функція $\chi(r)$ — постоянная, потому что $EM < EM'$ и, слѣдовательно, $r < r'$. Далѣе, пусть будетъ $b < a$; — тогда наименьшее значеніе r будетъ BG, а наибольшее значеніе r' —

CH. Положимъ теперь, что $\chi(r)$ непостоянная, но возрастаетъ, напримѣръ, съ увеличеніемъ r отъ r_1 до r_2. Построимъ, при этомъ, прямоугольникъ такъ, чтобы BG была равна или болѣе r_1, а CH равна или менѣе r_2; тогда постоянно будетъ:

$$r_1 \leqq r < r' \leqq r_2$$

и, слѣдовательно,

$$\chi(r') > \chi(r)$$

Такимъ образомъ всѣ элементы интеграла (10) имѣли бы положительныя значенія, и сумма ихъ не могла бы быть нулемъ. Слѣдовательно, — такъ какъ $\chi(r)$ постоянная, — имѣемъ:

$$\chi'(r) = 0$$

а потому, по отношеніямъ (8) и (9),

$$\frac{d\left(\frac{f(r)}{r}\right)}{dr} - 2\psi'(r) = 0$$

или

$$\frac{d\left(\frac{f(r)}{r}\right)}{dr} - 2\,\frac{F(r)-f(r)}{r^2} = 0$$

Отсюда выходитъ, что

$$F(r) = f(r) + \frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\left(\frac{f(r)}{r}\right)}{dr} \tag{11}$$

Слѣдовательно, одна неизвѣстная функція опредѣлена посредствомъ другой, и выраженіе силы притяженія двухъ элементовъ тока содержитъ только одну неизвѣстную функцію:

$$F = ii'\,ds\,ds'\left[f(r)\cos\varepsilon + \frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\left(\frac{f(r)}{r}\right)}{dr}\cos\theta\,\cos\theta'\right] \tag{12}$$

Для болѣе удобнаго писанія, положимъ, что

$$\frac{f(r)}{r} = \varphi(r) \tag{13}$$

тогда предъидущее выраженіе будетъ:

$$F = ii'\,ds\,ds'\left[r\,\varphi(r)\cos\varepsilon + \frac{1}{2}\,r^2\,\varphi'(r)\cos\theta\,\cos\theta'\right] \tag{14}$$

Дѣйствіе сомкнутаго тока на элементъ тока.

248. Построимъ въ серединѣ O элемента ds' три взаимно перпендикулярныя оси (фиг. 70) и обозначимъ x, y, z координаты середины M элемента ds сомкнутаго тока. Такъ какъ всѣ силы, дѣйствующія на элементъ ds', имѣютъ точку приложенія въ его серединѣ O, то и ихъ равнодѣйствующая будетъ имѣть туже самую точку приложенія. Проэкціи X, Y, Z этой равнодѣйствующей на оси координатъ имѣютъ видъ:

Фиг. 70.

θ M θ′ O

$$X = ii'\,ds'\int\left[r\,\varphi(r)\cos\varepsilon + \frac{1}{2}\,r^2\,\varphi'(r)\cos\theta\,\cos\theta'\right]\frac{x}{r}\,ds$$

При чемъ мы имѣемъ только одну перемѣнную независимую, а именно — дугу s сомкнутаго проводника, которую измѣримъ, принявъ за начало любую неподвижную точку. Поэтому, отношенія (3) и (5) могутъ быть написаны:

$$\cos\theta = \frac{dr}{ds}, \quad \cos\varepsilon = \frac{d(r\cos\theta')}{ds}$$

Если вмѣсто $\cos\theta$ вставимъ его значеніе, то предъидущее выраженіе будетъ:

$$X = ii'ds'\int\left[x\,\varphi(r)\cos\varepsilon\,ds + \frac{1}{2}\,xr\cos\theta'\,\varphi'(r)\,dr\right]$$

Разсмотримъ сначала второй членъ. — Интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\int xr\cos\theta'\,\varphi'(r)\,dr = \Big[xr\cos\theta'\,\varphi(r)\Big]_1^2 - \int \varphi(r)\,d\,(xr\cos\theta')$$

Такъ какъ токъ сомкнутъ, то первый членъ равенъ нулю, и, слѣдовательно,

$$\int xr\cos\theta'\,\varphi'(r)\,dr = -\int\varphi(r)d(xr\cos\theta')$$

$$= -\int\varphi(r)\left[xd\,(r\cos\theta') + r\cos\theta'\,dx\right]$$

$$= -\int\varphi(r)\,(x\cos\varepsilon\,ds + r\cos\theta'\,dx)$$

Поэтому выраженіе X сведется на

$$X = \frac{1}{2}\,ii'\,ds'\int\varphi(r)\,(x\cos\varepsilon\,ds - r\cos\theta'\,dx)$$

249. Если означимъ черезъ a, b, c косинусы угловъ, составляемыхъ элементомъ ds' съ осями координатъ, то, проэктируя разстояніе r и элементъ ds на ds', получимъ:

$$r\cos\theta' = ax + by + cz$$

$$ds\cos\varepsilon = adx + bdy + cdz$$

Отсюда выходитъ, что

$$x\cos\varepsilon\,ds - r\cos\theta'\,dx = b\,(xdy - ydx) - c\,(zdx - xdz)$$

а потому

$$X = b\,\frac{1}{2}\,ii'ds'\int\varphi(r)\,(xdy - ydx) - c\,\frac{1}{2}\,ii'\,ds'\int\varphi(r)(zdx - xdz)$$

Совершенно аналогичныя выраженія получатся для Y и Z. Отсюда

видно, что эти величины зависятъ отъ трехъ интеграловъ, которые обозначимъ черезъ A, B, C:

$$(15)\quad \begin{cases} A = \int\varphi(r)\,(ydz - zdy) \\ B = \int\varphi(r)\,(zdx - xdz) \\ C = \int\varphi(r)\,(xdy - ydx) \end{cases}$$

Отсюда

$$(16)\quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{2}\,ii'\,ds'\,(bC - cB) \\ Y = \dfrac{1}{2}\,ii'\,ds'\,(cA - aC) \\ Z = \dfrac{1}{2}\,ii'\,ds'\,(aB - bA) \end{cases}$$

Эти три интеграла (15) зависятъ отъ вида сомкнутаго тока и отъ положенія его относительно середины O элемента ds'; напротивъ того, они не зависятъ отъ направленія этого элемента.

250. Изъ формулъ (16) получатся отношенія:

$$aX + bY + cZ = 0$$

$$AX + BY + CZ = 0$$

Первое показываетъ, что равнодѣйствующая перпендикулярна къ элементу ds', а второе—что она перпендикулярна къ прямой OG, составляющей съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны A, B, C. Эта вторая прямая не зависитъ отъ направленія элемента ds'. Если проведемъ плоскость черезъ прямую OG и элементъ ds', то она будетъ направляющею плоскостью Ампера, а равнодѣйствующая къ ней перпендикулярна. Далѣе

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{2}\,ii'\,ds'\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - (aA + bB + cC)^2}$$

Если положимъ

$$A^2 + B^2 + C^2 = G^2$$

а черезъ δ назовемъ уголъ, составляемый прямою OG съ элементомъ ds', и черезъ R — равнодѣйствующую, то получимъ:

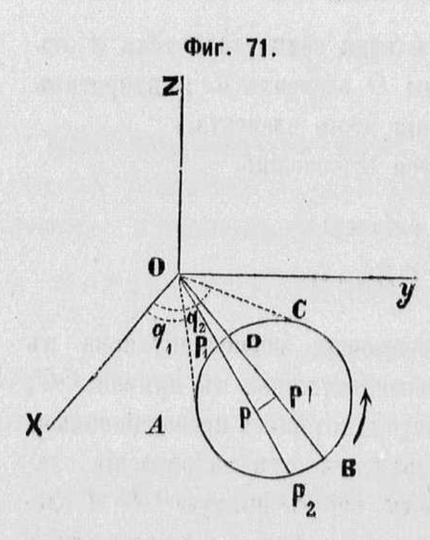
$$R = \frac{1}{2} ii' ds' G \sin\delta \tag{17}$$

Отложимъ на прямой OG длину, равную G, а по направленію элемента ds' — длину, равную единицѣ; тогда значеніе предъидущей формулы будетъ то, что величина равнодѣйствующей пропорціональна площади параллелограмма, построеннаго на этихъ прямыхъ. Она равна нулю, когда элементъ ds' совпадаетъ съ прямою OG. Кромѣ того, какъ мы уже сказали, направленіе ея перпендикулярно къ плоскости параллелограмма.

Дѣйствіе элементарнаго тока на элементъ тока.

251. Изслѣдованіе дѣйствія сомкнутаго тока на элементъ тока, какъ мы видѣли, приводится къ опредѣленію трехъ интеграловъ (15). Для послѣдующаго удобнѣе преобразовать эти простые интегралы въ двойные. Представимъ себѣ сплошную поверхность S, ограниченную сомкнутымъ токомъ. Проэктируемъ ее на плоскость XY и положимъ, что точка O лежитъ внѣ этой проэкціи (фиг. 71).

Фиг. 71.



Пусть P будетъ проэкція какой нибудь точки M этой поверхности, u означаетъ радіусъ векторъ OP, а q — уголъ xOP. Извѣстно*), что выраженіе $xdy - ydx$ изображается двойною площадью треугольника POP', а потому имѣемъ:

$$xdy - ydx = u^2 dq$$

Если токъ идетъ по направленію, означенному стрѣлкою, то уголъ q возрастаетъ отъ q_1 до q_2 по дугѣ ABC и снова уменьшается отъ q_2 до q_1, по дугѣ CDA. Если означимъ чрезъ u_1 и u_2 разстоянія между началомъ и точками P_1 и P_2, гдѣ прямая OP пересѣкаетъ кривую, то

$$C = \int_{q_1}^{q_2} \left[u_2^2 \varphi(r_2) - u_1^2 \varphi(r_1) \right] dq$$

Но

$$u_2^2 \varphi(r_2) - u_1^2 \varphi(r_1) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{d\left(u^2\varphi(r)\right)}{du} du$$

при чемъ интегрированіе относительно перемѣнной u простирается отъ точки P_1 до точки P_2. Такимъ образомъ для C получимъ значеніе:

$$C = \iint \frac{d\left(u^2\varphi(r)\right)}{du} du dq \tag{18}$$

И такъ, теперь мы имѣемъ двѣ перемѣнныя независимыя u и q и двойной интегралъ, простирающійся на площадь $ABCD$.

252. Для опредѣленія этого интеграла замѣтимъ, что

$$\frac{d\left(u^2 \varphi(r)\right)}{du} = 2u\,\varphi(r) + u^2 \varphi'(r) \frac{dr}{du}$$

Далѣе, изъ отношенія

$$r^2 = u^2 + z^2$$

выводимъ:

$$r \frac{dr}{du} = u + z \frac{dz}{du}$$

Теперь остается найти $\frac{dz}{du}$. Чтобы получить эту частную производную, мы должны перемѣнную q принять за постоянную, а измѣнять только u, чрезъ что получимъ двѣ точки P и P' на одномъ и томъ же радіусѣ векторѣ OP (фиг. 72). Эти двѣ точки суть проэкціи двухъ точекъ M и M', безконечно близколежащихъ

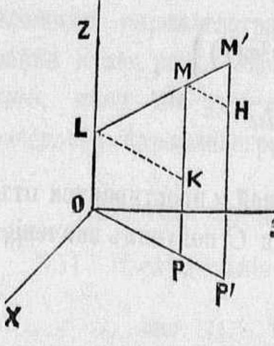
*) Объ этомъ см. въ 1 томѣ курса анализа Штурма, стр. 220 и 221, пер. В. Синцова, 1868 года. *Примѣч. перев.*

на поверхности S. Пусть L будетъ точка, въ которой прямая MM' встрѣчаетъ ось Z-овъ; тогда

$$\frac{dz}{du} = \frac{M'H}{MH} = \frac{MK}{LK} = \frac{z - OL}{u}$$

Но L есть точка, въ которой касательная плоскость въ точкѣ M къ поверхности S пересѣкаетъ ось Z-овъ. Поэтому, пусть уравненіе ея будетъ

Фиг. 72.



$$\alpha x + \beta y + \gamma z = p$$

При этомъ α, β, γ суть косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью изъ точки M къ поверхности S съ осями, а p — перпендикуляръ, опущенный изъ начала на касательную плоскость, длина котораго берется положительною или отрицательною, смотря потому, имѣетъ ли онъ одинаковое или противоположное направленіе съ нормалью.

Отсюда получимъ:

$$OL = \frac{p}{\gamma}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dz}{du} = \frac{\gamma z - p}{\gamma u}$$

$$\frac{dr}{du} = \frac{u}{r} + \frac{z(\gamma z - p)}{\gamma ur} = \frac{\gamma r^2 - pz}{\gamma ur}$$

$$(19) \qquad C = \iint \left[2\varphi(r) + r\varphi'(r) - \frac{pz}{\gamma r}\,\varphi'(r) \right] u\, du\, dq$$

Произведеніе $u\,du\,dq$ представляетъ элементъ площади, ограниченной кривою $ABCD$ въ плоскости XY; но онъ есть проэкція элемента $d\omega$ поверхности S, поэтому

$$u\,du\,dq = \gamma\, d\omega$$

и тогда получимъ:

$$(20) \qquad C = \sum \left\{ \left[2\varphi(r) + r\varphi'(r) \right] \gamma - \frac{pz}{r}\,\varphi'(r) \right\} d\omega$$

Для того чтобы $d\omega$ имѣлъ положительное значеніе, необходимо провести нормаль къ поверхности S въ такомъ направленіи, чтобы наблюдатель, находясь въ этой нормали ногами къ поверхности, увидѣлъ токъ идущимъ справа налѣво.

Если означимъ черезъ C' среднее значеніе величинъ, находящихся въ скобкахъ, а чрезъ ω — поверхность S, которая, какъ мы положили, ограничена токомъ, то можемъ написать: $C = C'\omega$. Такимъ же образомъ получимъ: $A = A'\omega$, $B = B'\omega$.

Подъ элементарнымъ токомъ подразумѣвается безконечно малый сомкнутый токъ. Для вычисленія дѣйствія элементарнаго тока на элементъ тока пользуются преимущественно только что выведенными формулами. Въ этомъ именно случаѣ среднее значеніе величинъ въ скобкахъ почти равно значенію ихъ въ любой точкѣ M безконечно малой поверхности ω. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} A' &= \left[2\varphi(r) + r\varphi'(r) \right] \alpha - \frac{px}{r}\varphi'(r) \\ B' &= \left[2\varphi(r) + r\varphi'(r) \right] \beta - \frac{py}{r}\varphi'(r) \\ C' &= \left[2\varphi(r) + r\varphi'(r) \right] \gamma - \frac{pz}{r}\varphi'(r) \end{aligned} \right.$$

вслѣдствіе чего три интеграла A, B, C будетъ извѣстны:

$$(22) \qquad A = A'\omega,\ B = B'\omega,\ C = C'\omega.$$

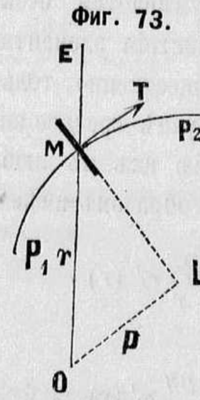
Дѣйствіе соленоида на элементъ тока.

253. Соленоидъ состоитъ изъ ряда равныхъ между собою элементарныхъ токовъ, безконечно близкихъ одинъ къ другому и перпендикулярныхъ къ одной и той же кривой. Такъ какъ дѣйствіе сомкнутаго тока на элементъ тока приводится къ силѣ, имѣющей

точку приложенія въ серединѣ этого элемента, то дѣйствіе соленоида, состоящаго изъ однихъ только сомкнутыхъ токовъ, также сведется на силу, приложенную къ серединѣ элемента.—Пусть ω будетъ поверхность, заключающая одинъ изъ малыхъ токовъ, а g — разстояніе двухъ послѣдовательныхъ токовъ; тогда число ихъ, содержащихся въ элементѣ $d\sigma$ направляющей кривой, будетъ равно $\frac{d\sigma}{g}$; а одна изъ составляющихъ дѣйствія соленоида на элементъ ds', находящійся въ началѣ, будетъ

$$(23)\qquad X = \frac{1}{2}\, i' ds' \frac{i\omega}{g}\left(b\int_1^2 C' d\sigma - c\int_1^2 B' d\sigma\right)$$

Фиг. 73.



При этомъ интегрированіе простирается на длину направляющей кривой P_1P_2 (фиг. 73). По принятому нами выше соглашенію, дугу слѣдуетъ разсматривать положительною въ такомъ направленіи, чтобы наблюдатель, находясь въ касательной ногами въ M, а головою въ T, увидѣлъ малый токъ идущимъ справа на лѣво. Эта прямая MT будетъ нормальна къ маленькой поверхности ω, которую можно принять за плоскую. Пусть x, y, z будутъ координаты точки M, тогда:

$$\gamma = \frac{dz}{d\sigma}\ ,\ \frac{p}{r} = \cos MOL = \cos EMT = \frac{dr}{d\sigma}$$

и

$$C' = \left[2\varphi(r) + r\varphi'(r)\right]\frac{dz}{d\sigma} - z\varphi'(r)\frac{dr}{d\sigma}$$

$$\int_1^2 C' d\sigma = \int_1^2 \left\{\left[2\varphi(r) + r\varphi'(r)\right]dz - z\varphi'(r)\,dr\right\}$$

Интегрируя послѣдній членъ по частямъ, получимъ:

$$\int_1^2 z\varphi'(r)\,dr = \Big[z\varphi(r)\Big]_1^2 - \int_1^2 \varphi(r)\,dz$$

и, слѣдовательно,

$$\int_1^2 C' d\sigma = -\Big[z\varphi(r)\Big]_1^2 + \int_1^2 \Big[3\varphi(r) + r\varphi'(r)\Big]dz$$

или проще:

$$(24)\qquad \int_1^2 C' d\sigma = -\Big[z\varphi(r)\Big]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{r^2}\frac{d\left(r^3\varphi(r)\right)}{dr}\,dz$$

Формула Ампера.

254. Мы привели двѣ неизвѣстныя функціи къ одной съ помощію перваго случая равновѣсія; остается окончательно опредѣлить эти функціи, прилагая второй случай равновѣсія. — Опытомъ доказано, что дѣйствіе соленоида, сомкнутаго въ самомъ себѣ, на находящійся гдѣ нибудь элементъ тока равно нулю, а потому составляющія X, Y, Z также должны быть равны нулю, какое бы ни было направленіе элемента ds', т. е. чѣмъ бы ни были a, b, c. Тогда, по уравненію (23), отдѣльно должно быть:

$$\int A' d\sigma = 0\ ,\ \int B' d\sigma = 0,\ \int C' d\sigma = 0$$

Далѣе, если соленоидъ сомкнутъ въ самомъ себѣ, то первый членъ въ уравненіи (24) равенъ нулю, и оно сведется на

$$\int C' d\sigma = \int \frac{1}{r^2}\frac{d\left(r^3\varphi(r)\right)}{dr}\,dz = \int \pi(r)\,dz$$

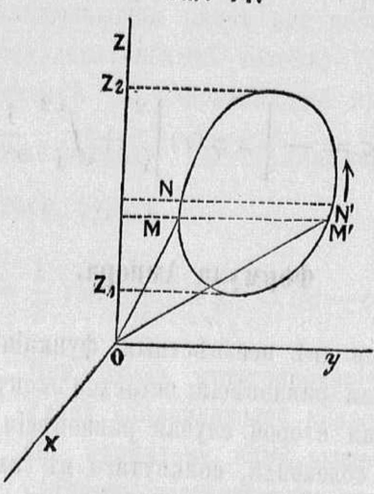
если положить для сокращенія

$$\frac{1}{r^2}\frac{d\left(r^3\varphi(r)\right)}{dr} = \pi(r)$$

Положимъ, что направляющая кривая плоская и лежитъ въ плоскости yz (фиг. 74), идя въ опредѣленномъ направленіи, означен-

номъ стрѣлкою. Двѣ безконечно близкія прямыя, параллельныя оси Y-овъ, отсѣкаютъ двѣ дуги MN и $M'N'$, для которыхъ значенія

Фиг. 74.



dz равны, но съ противными знаками. Если назвать чрезъ r и r разстоянія OM и OM', то получимъ:

$$\int C'd\sigma = \int_1^2 \left[\pi(r') - \pi(r)\right] dz = 0$$

255. Отсюда заключаемъ, что функція $\pi(r)$ постоянная. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что эта величина перемѣнная, напримѣръ возрастаетъ съ увеличеніемъ r отъ r_1 до r_2; тогда кривую можно провести вправо отъ Oz такимъ образомъ, чтобы r' было болѣе r и наименьшее значеніе r было бы равно или болѣе r_1, а наибольшее значеніе r' равнялось бы или было менѣе r_2, при чемъ

$$r_1 \leqq r < r' \leqq r_2$$

и, слѣдовательно,

$$\pi(r') > \pi(r)$$

При этомъ каждый членъ интеграла былъ бы положительный, и сумма ихъ не могла бы равняться нулю. И такъ, имѣемъ:

$$\pi(r) = h$$

гдѣ h означаетъ постоянную величину.

Вслѣдствіе опредѣленія $\pi(r)$, это уравненіе будетъ:

$$d\left(r^3 \varphi(r)\right) = hr^2 dr$$

а посредствомъ интегрированія получимъ:

$$r^3 \varphi(r) = \frac{hr^3}{3} + k$$

гдѣ k есть новая постоянная. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\varphi(r) = \frac{h}{3} + \frac{k}{r^3}$$

Но (n^0 247), мы положили, что

$$\frac{f(r)}{r} = \varphi(r)$$

откуда выходитъ, что

$$f(r) = \frac{hr}{3} + \frac{k}{r^2}$$

Постоянная h необходимо должна быть равна нулю, потому что въ противномъ случаѣ электродинамическая сила въ безконечномъ разстояніи была бы безконечно велика, что̀ противорѣчитъ опыту. Поэтому окончательно находимъ:

$$f(r) = \frac{k}{r^2}$$

и формула (12) для притяженія двухъ элементовъ тока сведется на

$$(a) \qquad F = \frac{kii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\,\cos\theta'\right)$$

а это и есть основная формула Ампера. Опытъ показываетъ, что постоянная величина k положительная.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Продолженіе электродинамики.

Полюсы соленоида. — Дѣйствіе сомкнутаго тока на соленоидъ. — Дѣйствіе соленоида на соленоидъ. — Амперова теорія магнетизма. — Упрощеніе формулы Ампера. — Работа электродинамическихъ силъ между двумя сомкнутыми токами. — Работа между магнитомъ и сомкнутымъ токомъ.

Полюсы соленоида.

256. Такъ какъ намъ теперь извѣстна $f(r)$, то мы можемъ упростить формулы, относящіяся къ дѣйствію соленоида на элементъ тока. Такъ какъ $\varphi(r) = \frac{k}{r^3}$, то формула (24) приведется къ первому члену:

$$\int_1^2 C' d\sigma = -\Big[z\varphi(r) \Big]_1^2 = \frac{kz_1}{r_1^{\,3}} - \frac{kz_2}{r_2^{\,3}}$$

Равнымъ образомъ получимъ:

$$\int_1^2 A' d\sigma = \frac{kx_1}{r_1^{\,3}} - \frac{kx_2}{r_2^{\,3}}$$

$$\int_1^2 B' d\sigma = \frac{ky_1}{r_1^{\,3}} - \frac{ky_2}{r_2^{\,3}}$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (23) и полагая

$$\frac{i\omega}{g} = \mu$$

получимъ:

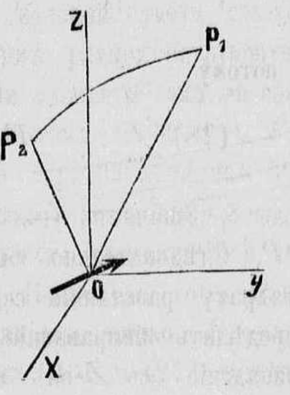
$$X = \frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \left(\frac{bz_1 - cy_1}{r_1^{\,3}} - \frac{bz_2 - cy_2}{r_2^{\,3}} \right)$$

$$Y = \frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \left(\frac{cx_1 - az_1}{r_1^{\,3}} - \frac{cx_2 - az_2}{r_2^{\,3}} \right)$$

$$Z = \frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \left(\frac{ay_1 - bx_1}{r_1^{\,3}} - \frac{ay_2 - bx_2}{r_2^{\,3}} \right)$$

Отсюда выходитъ, что сила, производимая соленоидомъ на элементъ тока, имѣетъ точку приложенія въ серединѣ O элемента и зависитъ только отъ положенія конечныхъ точекъ P_1 и P_2 направляющей кривой (фиг. 75), но отнюдь не отъ формы этой кривой. Это и есть основаніе, по которому Амперъ назвалъ такія конечныя точки полюсами соленоида. Эту силу можно разсматривать какъ равнодѣйствующую двухъ силъ, точки приложенія которыхъ находятся въ O. Одна изъ нихъ F_1 имѣетъ составляющими:

Фиг. 75.



$$(26) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \frac{bz_1 - cy_1}{r_1^{\,3}} \\ Y_1 = \frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \frac{cx_1 - az_1}{r_1^{\,3}} \\ Z_1 = \frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \frac{ay_1 - bx_1}{r_1^{\,3}} \end{cases}$$

и относится къ полюсу P_1, а другая F_2 имѣетъ составляющими:

$$(27) \quad \begin{cases} X_2 = -\frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \frac{bz_2 - cy_2}{r_2^{\,3}} \\ Y_2 = -\frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \frac{cx_2 - az_2}{r_2^{\,3}} \\ Z_2 = -\frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \frac{ay_2 - bx_2}{r_2^{\,3}} \end{cases}$$

и относится къ полюсу P_2.

257. Изъ формулъ (26) выходитъ, что

$$aX_1 + bY_1 + cZ_1 = 0$$

$$x_1 X_1 + y_1 Y_1 + z_1 Z_1 = 0$$

слѣдовательно сила F_1 перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ элементъ ds' и прямую OP_1. Далѣе имѣемъ также:

$$\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = \frac{1}{2}\frac{k\mu\, i'\, ds'}{r_1^3}\sqrt{r_1^2 - (ax_1 + by_1 + cz_1)^2}$$

а потому

$$(28) \qquad F_1 = \frac{1}{2} k\mu\, i' ds' \frac{\sin \delta_1}{r_1^2}$$

если δ_1 означаетъ уголъ, составляемый элементомъ ds' съ прямою OP_1. Слѣдовательно, сила F_1 измѣняется обратно пропорціонально квадрату разстоянія середины O отъ полюса P_1. Остается еще опредѣлить направленіе силы. — Для этой цѣли приведемъ въ совпаденіе ось Z-овъ съ элементомъ тока и проведемъ плоскость YZ черезъ полюсъ P_1; тогда

$$a = b = 0 \ , \ c = 1 \ , \ Y_1 = Z_1 = 0 \ , \ X_1 = -\frac{1}{2} k\mu\, i' ds' \frac{y_1}{r_1^3}$$

Если наблюдатель помѣстится въ Oz, т. е. въ элементѣ тока, такимъ образомъ, что токъ будетъ входить въ его ноги и выходить черезъ голову, при чемъ лицо его будетъ обращено къ полюсу P_1, то сила будетъ дѣйствовать влѣво.

Такимъ же образомъ и сила F_2 перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ элементъ тока ds' и прямую OP_2, а величина ея будетъ

$$F_2 = \frac{1}{2} k\mu\, i' ds' \frac{\sin \delta_2}{r_2^2}$$

гдѣ δ_2 означаетъ уголъ между ds' и OP_2. Если наблюдатель помѣстится какъ прежде, но лицомъ къ полюсу P_2, то сила будетъ

дѣйствовать вправо. Поэтому, когда приходится разсматривать дѣйствіе соленоида на элементъ тока, то соленоидъ замѣняютъ двумя его полюсами P_1 и P_2; затѣмъ вычисляютъ вышеприведеннымъ способомъ силы F_1 и F_2, приложенныя къ серединѣ O элемента, и окончательно опредѣляютъ ихъ равнодѣйствующую. Для краткости говорятъ, что силы F_1 и F_2 суть дѣйствія полюсовъ на элементъ тока, при чемъ постоянная μ есть напряженіе каждаго полюса.

258. Мы нашли дѣйствіе соленоида на элементъ тока; ясно, что дѣйствіе элемента на соленоидъ приводится къ равной, но противоположной силѣ $-R$, точка приложенія которой будетъ также въ O. Эта сила получится, если опредѣлимъ равнодѣйствующую силъ $-F_1$ и $-F_2$, называемыхъ дѣйствіями элемента тока на оба полюса. Такимъ образомъ дѣйствіе элемента тока на полюсъ P_1 есть сила, приложенная къ его серединѣ и перпендикулярная къ плоскости, проходящей черезъ этотъ элементъ и полюсъ; направленіе же этой силы идетъ вправо отъ наблюдателя, находящагося въ токѣ и обращеннаго лицомъ къ полюсу P_1. Напротивъ того, дѣйствіе элемента тока на полюсъ P_2 направлено влѣво. P_1 есть южный полюсъ, а P_2 — сѣверный. Формулы (26) и (27) дадутъ составляющія этихъ силъ, если перемѣнимъ знакъ, и если начало будетъ лежать въ серединѣ элемента.

Дѣйствіе сомкнутаго тока на соленоидъ.

259. Разсмотримъ дѣйствіе сомкнутаго тока на южной полюсъ P_1 соленоида, при чемъ оси координатъ могутъ имѣть какое угодно положеніе. — Пусть x_1, y_1, z_1 будутъ координаты полюса P_1, а x', y', z' — координаты середины элемента тока. Дѣйствіе этого элемента на полюсъ P_1 приводится къ силѣ, приложенной къ его серединѣ и составляющія которой, вслѣдствіе уравненій (26), суть выраженія вида:

$$X_1 = -\frac{1}{2} k\mu i' \, ds' \, \frac{b(z_1 - z') - c(y_1 - y')}{r^3}$$

Если привести начало координатъ въ совпаденіе съ полюсомъ, то эти выраженія упростятся и примутъ видъ:

$$X_1 = \frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \frac{bz' - cy'}{r^3}$$

$$Y_1 = \frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \frac{cx' - az'}{r^3}$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} k\mu\, i'\, ds' \frac{ay' - bx'}{r^3}$$

Теперь мы покажемъ, что всѣ силы, приложенныя къ серединѣ ряда элементовъ, образующихъ сомкнутый проводникъ, имѣютъ равнодѣйствующую, проходящую черезъ точку P_1. Для того, чтобы это случилось, необходимо только, чтобы сумма моментовъ всѣхъ этихъ силъ относительно каждой изъ трехъ осей равнялась нулю. Замѣтимъ, что косинусы a, b, c угловъ, составляемыхъ элементомъ ds' съ осями, равны $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$; слѣдовательно, для суммы моментовъ относительно оси Z-овъ найдемъ:

$$\sum \left(x'\, Y_1 - y'\, X_1 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\, k\mu\, i' \int \frac{x'(x'\,dz' - z'\,dx') + y'(y'\,dz' - z'\,dy')}{r^3}$$

$$= \frac{1}{2}\, k\mu\, i' \int \frac{r^2\,dz' - z'(x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz')}{r^3}$$

$$= \frac{1}{2}\, k\mu\, i' \int \frac{r\,dz' - z'\,dr}{r^2} = \frac{1}{2}\, k\mu\, i' \int d\left(\frac{z'}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, k\mu\, i' \left[\frac{z'}{r}\right]_1^2$$

Если проводникъ сомкнутъ, то сумма равна нулю.

260. Вычислимъ теперь равнодѣйствующую. Проэкціи ея на три оси координатъ суть:

$$(29)\quad \begin{cases} X = \frac{1}{2} k\mu\, i' \int \frac{z'dy' - y'dz'}{r^3} \\ Y = \frac{1}{2} k\mu\, i' \int \frac{x'dz' - z'dx'}{r^3} \\ Z = \frac{1}{2} k\mu\, i' \int \frac{y'dx' - x'dy'}{r^3} \end{cases}$$

Если не обращать вниманія на знаки, эти интегралы имѣютъ тотъ же самый видъ, какъ и интегралы A, B, C, которыми мы пользовались при отысканіи дѣйствія сомкнутаго тока на элементъ тока (n^0 249); въ нихъ необходимо только замѣнить $\varphi(r)$ ея значеніемъ $\frac{k}{r^3}$. Слѣдовательно, эти простые интегралы также можно преобразовать въ двойные. Представимъ себѣ поверхность, ограниченную сомкнутымъ токомъ, и означимъ чрезъ x', y', z' координаты любой точки на этой поверхности, чрезъ α, β, γ—косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью изъ этой точки къ поверхности съ осями координатъ. При этомъ нормаль проводится въ такомъ направленіи, чтобы находящійся въ ней наблюдатель, стоя ногами на поверхности, увидѣлъ токъ идущимъ справа налѣво. Наконецъ, пусть p будетъ разстояніе между началомъ и касательною плоскостью, а $d\omega'$ — элементъ поверхности; тогда, прилагая формулу (20) въ n^0 252 и перемѣняя знаки, получимъ:

$$(30)\quad \begin{cases} X = \frac{1}{2} k\mu\, i' \sum \left(\frac{\alpha}{r^3} - \frac{3px'}{r^5}\right) d\omega' \\ Y = \frac{1}{2} k\mu\, i' \sum \left(\frac{\beta}{r^3} - \frac{3py'}{r^5}\right) d\omega' \\ Z = \frac{1}{2} k\mu\, i' \sum \left(\frac{\gamma}{r^3} - \frac{3pz'}{r^5}\right) d\omega' \end{cases}$$

Такимъ образомъ дѣйствіе сомкнутаго тока на южный полюсъ P_1

соленоида приводится къ силѣ, имѣющей точку приложенія въ P_1, и составляющія которой опредѣляются формулами (29) или (30). Дѣйствіе тока на сѣверный полюсъ P_2 также приводится къ силѣ, приложенной къ P_2. Чтобы получить ея составляющія, стоитъ только перемѣнить знакъ y μ въ предъидущихъ формулахъ и представить себѣ начало перенесеннымъ въ P_2. Очевидно, отсюда выходитъ, что дѣйствіе сомкнутаго тока на соленоидъ слагается изъ двухъ силъ, изъ которыхъ одна приложена къ полюсу P_1, а другая — къ P_2.

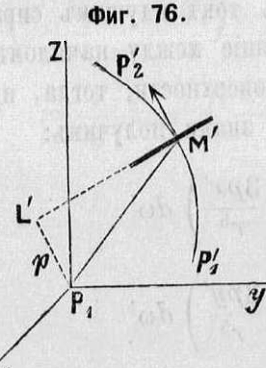
Если сомкнутый токъ безконечно малъ, то формулы (30) будутъ:

$$(31)\quad \begin{cases} X = \frac{1}{2} k\mu i'\omega' \left(\frac{\alpha}{r^3} - \frac{3px'}{r^5} \right) \\ Y = \frac{1}{2} k\mu i'\omega' \left(\frac{\beta}{r^3} - \frac{3py'}{r^5} \right) \\ Z = \frac{1}{2} k\mu i'\omega' \left(\frac{\gamma}{r^3} - \frac{3pz'}{r^5} \right) \end{cases}$$

Дѣйствіе соленоида на соленоидъ.

261. Теперь мы перейдемъ къ разсматриванію втораго соленоида $P'_1\ P'_2$ (фиг. 76), состоящаго изъ безконечно малыхъ сомкнутыхъ токовъ, съ площадью ω' и напряженіемъ i'. Какъ мы уже видѣли, дѣйствіе каждаго изъ этихъ сомкнутыхъ токовъ на полюсъ P_1 перваго соленоида приводится къ силѣ, приложенной къ P_1 и опредѣляемой формулами (31). Такимъ же образомъ дѣйствіе втораго соленоида на тотъ же самый полюсъ приводится къ одной силѣ, приложенной къ P_1. Такъ какъ на каждомъ элементѣ $d\sigma'$ направляющей кривой $P'_1 P'_2$ число малыхъ токовъ равно $\frac{d\sigma'}{g'}$, если g' означаетъ разстояніе каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ токовъ, то составляющія этой силы будутъ имѣть видъ:

Фиг. 76.



$$X = \frac{1}{2} k\mu \frac{i'\ \omega'}{g'} \int \left(\frac{\alpha}{r^3} - \frac{3px'}{r^5} \right) d\sigma'$$

При этомъ α, β, γ означаютъ косинусы угловъ, составляемыхъ касательною къ кривой $P'_1\ P'_2$ съ осями координатъ, а p — перпендикуляръ $P_1 L'$, опущенный изъ начала P_1 на плоскость тока. Поэтому получимъ:

$$\alpha = \frac{dx'}{d\sigma'}\ ,\quad \frac{p}{r} = \frac{dr}{d\sigma'}$$

Далѣе, если положимъ

$$\frac{i'\ \omega'}{g'} = \mu'$$

гдѣ μ' означаетъ напряженіе втораго соленоида, то предъидущая формула перейдетъ въ

$$X = \frac{1}{2} k\mu\mu' \int \left(\frac{dx'}{r^3} - \frac{3x'dr}{r^4} \right) = \frac{1}{2} k\mu\mu' \int d \left(\frac{x'}{r^3} \right) = \frac{1}{2} k\mu\mu' \left[\frac{x'}{r^3} \right]_1^2$$

Поэтому дѣйствіе втораго соленоида на южный полюсъ P_1 перваго есть сила, приложенная къ P_1 и имѣющая составляющими:

$$(32)\quad \begin{cases} X = \frac{1}{2} k\mu\mu' \left(\frac{x'_2}{r_2{}^3} - \frac{x'_1}{r_1{}^3} \right) \\ Y = \frac{1}{2} k\mu\mu' \left(\frac{y'_2}{r_2{}^3} - \frac{y'_1}{r_1{}^3} \right) \\ Z = \frac{1}{2} k\mu\mu' \left(\frac{z'_2}{r_2{}^3} - \frac{z'_1}{r_1{}^3} \right) \end{cases}$$

262. Эту силу можно разсматривать какъ равнодѣйствующую двухъ силъ, приложенныхъ къ P_1, изъ которыхъ одна имѣетъ составляющими:

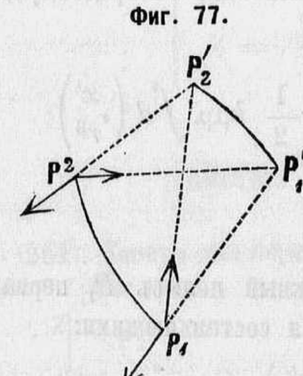
$$\frac{1}{2}\,k\mu\mu'\,\frac{x'_2}{r_2^{\,3}}\,,\quad \frac{1}{2}\,k\mu\mu'\,\frac{y'_2}{r_2^{\,3}}\,,\quad \frac{1}{2}\,k\mu\mu'\,\frac{z'_2}{r_2^{\,3}}$$

а другая, напротивъ того, —

$$-\frac{1}{2}\,k\mu\mu'\,\frac{x'_1}{r_1^{\,3}}\,,\ -\frac{1}{2}\,k\mu\mu'\,\frac{y'_1}{r_1^{\,3}}\,,\ -\frac{1}{2}\,k\mu\mu'\,\frac{z'_1}{r_1^{\,3}}$$

Первая сила, напряженіе которой равно $\dfrac{\frac{1}{2}\,k\mu\mu'}{r_2^{\,2}}$, имѣетъ направленіе по $P_1P'_2$ (фиг. 77); она притягательная и измѣняется въ обратномъ отношеніи квадрата разстоянія $P_1P'_2$. Вторая сила, напряженіе которой равно $\dfrac{\frac{1}{2}\,k\mu\mu'}{r^{\,2}}$, имѣетъ направленіе по продолженію прямой P'_1P_1; она отталкивательная и измѣняется также обратно пропорціонально квадрату разстоянія $P_1P'_1$. Чтобы получить дѣйствіе втораго соленоида на сѣверный полюсъ P_2 перваго, — необходимо только перемѣнить знаки у μ въ предъидущихъ формулахъ и положить, что начало находится въ P_2. Очевидно, это дѣйствіе также будетъ состоять изъ двухъ силъ, приложенныхъ къ P_2, изъ которыхъ одна дѣйствуетъ отталкивательно по направленію P'_2P_2, а другая — притягательно по направленію $P_2P'_1$.

Фиг. 77.



Все происходитъ такъ, какъ еслибы существовали однѣ только конечныя точки соленоидовъ, т. е. ихъ полюсы, которые притягиваются или отталкиваются пропорціонально произведенію изъ ихъ напряженій и обратно пропорціонально квадрату разстоянія. Поэтому можно сказать, что одноименные полюсы отталкиваются, а разноименные — притягиваются.

Амперова теорія магнетизма.

263. Поразительная аналогія, существующая между свойствами соленоидовъ и магнитовъ, привела Ампера къ тому воззрѣнію, что магнитныя явленія обязаны своимъ происхожденіемъ электрическимъ токамъ [1]). Онъ сравнилъ магниты съ соленоидами и, вслѣдствіе того, свелъ магнетизмъ на электричество.

Прежде всего оказывается, что дѣйствіе элементарнаго тока такое же точно, какъ и дѣйствіе безконечно малаго соленоида $p_1\ p_2$, перпендикулярнаго къ плоскости тока (фиг. 78). Поэтому, если $p_1\ p_2$ будетъ весьма малая длина соленоида, то взятый элементарный токъ, напряженіе котораго равно i, можно замѣнить n равными между собою элементарными токами, находящимися на разстояніи $g=\dfrac{l}{n}$ другъ отъ друга, напряженія которыхъ $\dfrac{i}{n}$ и которые перпендикулярны къ прямой $p_1\ p_2$. При чемъ эти n токовъ представляютъ соленоидъ, напряженіе котораго $\mu=\dfrac{i\omega}{l}$. Слѣдовательно, по Амперу, магнитная частица есть такая, вокругъ которой вращается элементарный электрическій токъ, а намагничиваніе заключается только въ произведеніи или, проще, во вращеніи этихъ элементарныхъ токовъ.

Фиг. 78.

p_2

p_1

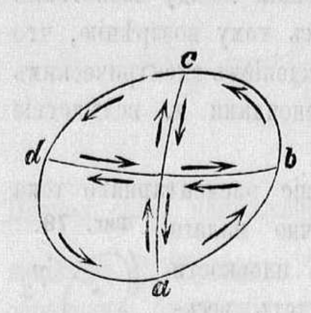
264. Точно также и токи можно замѣнить магнитами, слѣдовательно вмѣсто электрическихъ силъ ввести силы, дѣйствующія между извѣстными точками и подчиняющіяся закону Ньютона. — Разсмотримъ теперь какой нибудь сомкнутый токъ съ напряженіемъ i; далѣе, представимъ себѣ, какъ прежде, поверхность (фиг. 79), ограниченную токомъ, и раздѣлимъ ее на нѣсколько частей. Наконецъ, предположимъ, что по предѣльной линіи, окружающей каждую часть, протекаетъ токъ съ напряженіемъ i въ такомъ направленіи, что наблюдатель видитъ

---

[1]) Ampère, Mémoires de l'académie de Paris T. VI, p. 323.
W. Weber, Elektrodyn. Maassbestimmungen insbesondere über Diamagnetismus S. 557.

всѣ токи вращающимися въ одну сторону. Каждая внутренняя линія представляетъ двѣ смежныя границы и по ней проходятъ соотвѣтствующіе имъ токи въ противоположномъ направленіи. Отсюда выходитъ, что дѣйствія всѣхъ внутреннихъ частей уничтожаются попарно, а, слѣдовательно, остаются только внѣшнія части ab, bc, cd, da, которыя въ совокупности представляютъ взятый токъ. Поэтому, если принять, что поверхность будетъ разбита на безконечное число безконечно малыхъ площадокъ $d\omega$, то взятый токъ можно замѣнить безконечнымъ множествомъ элементарныхъ токовъ $id\omega$. Каждый изъ этихъ малыхъ токовъ можно замѣнить маленькимъ магнитомъ $p_1 p_2$, нормальнымъ къ элементу поверхности и имѣющимъ напряженіе $\frac{i\,d\omega}{l}$. При этомъ мѣсто точки p_1 представляетъ южную магнитную площадку, а мѣсто точки p_2 — сѣверную магнитную площадку; l есть разстояніе этихъ двухъ площадокъ, а магнитное напряженіе на единицу площади каждой изъ нихъ будетъ $\frac{i}{l}$. Такимъ образомъ токъ замѣняется двумя магнитными площадками, изъ которыхъ одна южная, а другая — сѣверная, и обѣ ограничены токомъ.

Фиг. 79.



Такой способъ приведенія электродинамическихъ силъ къ магнитнымъ не имѣетъ, кажется, особой теоретической важности; но онъ можетъ быть до нѣкоторой степени полезенъ, потому что названныя только что силы суть центральныя, т. е. такія, которыя исходятъ изъ неподвижныхъ точекъ, и, слѣдовательно, безъ дальнѣйшаго къ нимъ можно приложить теорію потенціала.

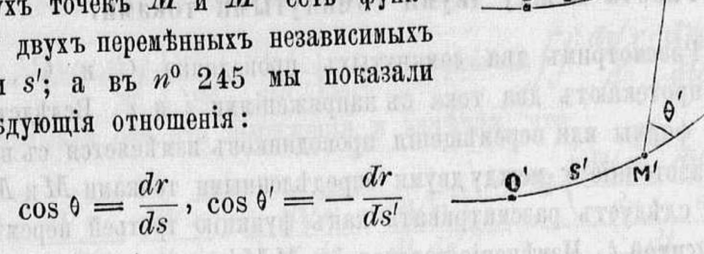
Упрощеніе формулы Ампера.

265. Возвратимся еще разъ къ формулѣ Ампера (n^0 255):

$$(a)\qquad F = \frac{k\,ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

посредствомъ которой опредѣляется взаимное притяженіе двухъ элементовъ тока ds и ds'. Положеніе срединъ M и M' обоихъ элементовъ означимъ дугами s и s', считая ихъ по проводнику отъ двухъ неподвижныхъ точекъ O и O' (фиг. 80). Такимъ образомъ, разстояніе r двухъ точекъ M и M' есть функція двухъ перемѣнныхъ независимыхъ s и s'; а въ n^0 245 мы показали слѣдующія отношенія:

Фиг. 80.



$$\cos\theta = \frac{dr}{ds},\ \cos\theta' = \frac{dr}{ds'}$$

$$\cos\varepsilon = \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2r}{ds\,ds'}$$

Отсюда выходитъ, что

$$\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta' = \frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - \frac{rd^2r}{ds\,ds'}$$

Величина $\sqrt{r}$ или $r^{\frac{1}{2}}$ — также функція двухъ перемѣнныхъ независимыхъ s и s', и получимъ:

$$\frac{d\sqrt{r}}{ds} = \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\frac{dr}{ds}$$

$$\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} = -\frac{1}{4}r^{-\frac{3}{2}}\frac{dr}{ds'}\frac{dr}{ds} + \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2r}{ds\,ds'}$$

Откуда

$$-2r^{\frac{3}{2}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} = \frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2r}{ds\,ds'}$$

и, слѣдовательно,

$$\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta' = -2r^{\frac{3}{2}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

Поэтому формула (a) приведется къ болѣе простому виду:

$$(a') \qquad F = -\frac{2\,k\,ii'\,ds\,ds'}{\sqrt{r}}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

Этимъ видомъ ея мы воспользуемся при опредѣленіи работы.

Работа между двумя сомкнутыми токами.

266. Разсмотримъ два сомкнутыхъ проводника C и C', по которымъ протекаютъ два тока съ напряженіями i и i'. Вслѣдствіе измѣненія формы или перемѣщенія проводниковъ измѣняется съ временемъ и разстояніе r между двумя опредѣленными точками M и M'; поэтому r слѣдуетъ разсматривать какъ функцію третьей перемѣнной независимой t. Измѣненіе разстоянія MM' въ безконечно малое время dt, вслѣдствіе подвижности проводника, будетъ $\frac{dr}{dt}dt$, а элементарная работа силы F, дѣйствующей между элементами ds и ds' проводниковъ, выразится посредствомъ

$$-F\frac{dr}{dt}\,dt = 2\,kii'\,ds\,ds'\,\frac{1}{\sqrt{r}}\,\frac{dr}{dt}\,dt\,\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

или проще —

$$4\,kii'\,ds\,ds'\,\frac{d\sqrt{r}}{dt}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\,dt$$

Поэтому работа всѣхъ силъ, дѣйствующихъ между двумя проводниками втеченіе времени dt, опредѣлится формулою:

$$(33) \qquad dL = 4\,kii'\,dt\iint\frac{d\sqrt{r}}{dt}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\,ds\,ds'$$

гдѣ двойной интегралъ распространяется на всю длину обоихъ проводниковъ.

Теперь мы преобразуемъ это выраженіе. Интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\int\frac{d\sqrt{r}}{dt}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\,ds = \left[\frac{d\sqrt{r}}{dt}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right]_{s_0}^{s_1} - \int\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds}\,ds$$

и, слѣдовательно,

$$(34) \qquad \begin{cases} dL = 4k\,ii'\,dt\displaystyle\int\left[\frac{d\sqrt{r}}{dt}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right]_{s_0}^{s_1} ds' \\ \quad - 4k\,ii'\,dt\displaystyle\iint\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds}\,ds\,ds' \end{cases}$$

Вслѣдствіе симметріи, получимъ также:

$$dL = 4kii'\,dt\int\left[\frac{d\sqrt{r}}{dt}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right]_{s'_0}^{s'_1} ds - 4kii'\,dt\iint\frac{d\sqrt{r}}{ds}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds'}\,ds\,ds'$$

Складывая оба эти выраженія и замѣчая, что

$$\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds} + \frac{d\sqrt{r}}{ds}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds'} = \frac{d\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)}{dt}$$

получимъ:

$$(35) \qquad \begin{cases} dL = 2kii'\,dt\displaystyle\int\left[\frac{d\sqrt{r}}{dt}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right]_{s_0}^{s_1} ds' + 2kii'\,dt\displaystyle\int\left[\frac{d\sqrt{r}}{dt}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right]_{s'_0}^{s'_1} ds \\ \quad -2kii'\,dt\displaystyle\iint\frac{d\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)}{dt}\,ds\,ds'. \end{cases}$$

267. Если оба проводника сомкнуты, то первые два члена справа равны нулю, и предъидущая формула сведется на

$$(36) \qquad dL = -2k\,ii'\,dt\iint\frac{d\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)}{dt}\,ds\,ds'$$

Положимъ, что

$$(\alpha) \qquad W = -2k\iint\frac{d\sqrt{r}}{ds}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\,ds\,ds'$$

гдѣ W есть функція отъ t. Если каждый изъ проводниковъ не измѣняется въ длинѣ, то предѣлы двойнаго интеграла будутъ постоянны, и тогда

$$\frac{dW}{dt} = -2k\iint\frac{d\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)}{dt}\,ds\,ds'$$

И такъ,

$$(37)\qquad dL = ii'\frac{dW}{dt}dt = ii'\,dW$$

Величина W можетъ быть приведена еще и къ другому виду, а именно:

$$W = -\frac{k}{2}\iint\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}dsds'$$

или

$$(\alpha')\qquad W = \frac{k}{2}\iint\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}dsds'$$

Далѣе

$$W = \frac{k}{2}\iint r\frac{dr}{ds'}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}dsds'$$

Интегрируя по частямъ и принимая во вниманіе отношеніе (b) въ n^0 244, найдемъ:

$$\int r\frac{dr}{ds'}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}ds = \left[\frac{dr}{ds'}\right]_1^2 - \int\frac{1}{r}\frac{d\left(r\frac{dr}{ds'}\right)}{ds}ds = \int\frac{\cos\varepsilon}{r}ds$$

и, слѣдовательно,

$$(\alpha'')\qquad W = \frac{k}{2}\iint\frac{\cos\varepsilon}{r}ds\,ds'$$

Эту величину W Гельмгольтцъ называетъ потенціаломъ относительно взаимнаго дѣйствія двухъ токовъ 1 напряженія, которые идутъ по проводникамъ въ опредѣленныхъ направленіяхъ. Если измѣнить направленіе одного изъ токовъ, то измѣнятся знаки у $\cos\varepsilon$, а, вмѣстѣ съ тѣмъ, и у значенія W.

Работа между магнитомъ и сомкнутымъ токомъ.

268. Опредѣлимъ сначала работу силъ, дѣйствующихъ между сомкнутымъ токомъ и полюсомъ соленоида или магнита. Мы видѣли

(n^0 260), что дѣйствіе сомкнутаго тока на южный полюсъ приводится къ одной равнодѣйствующей, имѣющей точку приложенія въ полюсѣ. Формулы (29) и (30) дадутъ составляющія этой силы, если начало совпадаетъ съ полюсомъ. Пусть теперь начало имѣетъ любое положеніе; тогда, если x, y, z означаютъ координаты полюса, формулы (30) перейдутъ въ

$$X = \frac{k\mu i}{2}\iint\left[\frac{\alpha}{r^3} - \frac{3p\,(x'-x)}{r^5}\right]d\omega$$

Но, далѣе

$$p = \alpha\,(x'-x) + \beta\,(y'-y) + \gamma\,(z'-z)$$

$$\frac{d\left(\frac{p}{r^3}\right)}{dx} = \frac{\alpha}{r^3} + \frac{3p\,(x'-x)}{r^5}$$

поэтому

$$X = -\frac{k\mu i}{2}\iint\frac{d\left(\frac{p}{r^3}\right)}{dx}\,d\omega$$

Если положить

$$(\beta)\qquad V = \frac{k}{2}\iint\frac{pd\omega}{r^3}$$

то окончательно получимъ:

$$X = -\mu i\frac{dV}{dx}\,,\quad Y = -\mu i\frac{dV}{dy}\,,\quad Z = -\mu i\frac{dV}{dz}$$

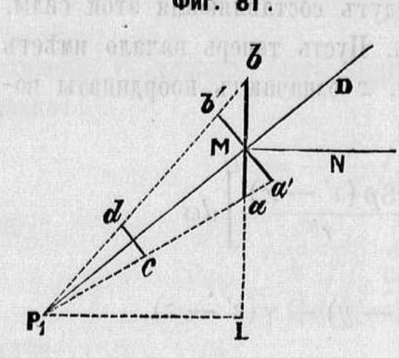
Такъ какъ работа силъ происходитъ отъ взаимнаго дѣйствія тока и полюса и зависитъ только отъ относительнаго перемѣщенія проводника и полюса, то первый можно разсматривать неподвижнымъ, а движущимся одинъ только второй. Такимъ образомъ необходимо разсмотрѣть только работу силы, дѣйствующей на полюсъ, и эта работа будетъ

$$(38)\qquad dL = -\mu i\,dV$$

Если полюсъ сѣверный, то у μ перемѣняется знакъ.

269. Здѣсь функція V имѣетъ весьма простое геометрическое значеніе. — Изъ полюса P_1, какъ центра, опишемъ шаръ радіусомъ, равнымъ 1, и разсмотримъ ту часть Ω его поверхности, которая вырѣзывается конусомъ, вершина котораго въ P_1, а направляющая есть сомкнутый проводникъ. Пусть M будетъ любая точка поверхности S, ограниченной сомкнутымъ токомъ; MN — нормаль въ этой точкѣ, которую представимъ себѣ проведенною такъ, что находящійся въ ней наблюдатель увидитъ токъ идущимъ справа налѣво; наконецъ, пусть p будетъ длина перпендикуляра P_1L, опущеннаго изъ точки P_1 на касательную плоскость въ M; тогда получимъ:

Фиг. 81



$$\frac{p}{r} = \cos MP_1L = \cos DMN$$

Каждому элементу ab или $d\omega$ поверхности S соотвѣтствуетъ элементъ cd или $d\Omega$ шара, радіусъ котораго равенъ 1, а также элементъ $a'b'$ или $r^2 d\Omega$ поверхности шара, радіусъ котораго P_1M. Но этотъ элементъ можно разсматривать какъ проэкцію элемента $d\omega$ на плоскость, перпендикулярную къ P_1M, а потому получимъ:

$$r^2 d\Omega = \pm\, d\omega \times \cos DMN = \pm \frac{p\, d\omega}{r}$$

и, слѣдовательно,

$$d\Omega = \pm \frac{p\, d\omega}{r^3}$$

При этомъ нужно взять положительный или отрицательный знакъ, смотря потому, составляетъ ли нормаль MN острый или тупой уголъ съ продолженіемъ MD радіуса вектора P_1M.

Слѣдовательно, мы получимъ для потенціала выраженіе:

$$(\beta') \qquad V = \frac{k}{2} \sum (\pm d\Omega) = \pm \frac{k}{2}\, \Omega$$

Поэтому функція V пропорціональна отверстію конуса, черезъ которое видѣнъ токъ у полюса.

270. Въ заключеніе, разсмотримъ дѣйствіе магнита на сомкнутый токъ. Если опредѣлить, какъ прежде, функцію V относительно дѣйствія каждаго полюса на сомкнутый токъ и положить

$$W = -\sum \mu V$$

то работа силъ, дѣйствующихъ между сомкнутымъ токомъ и магнитомъ, выразится посредствомъ

$$(39) \qquad dL = i\, dW$$

Впрочемъ, это непосредственно вытекаетъ и изъ сдѣланнаго нами замѣчанія въ n^0 264. Мы видѣли, что сомкнутый токъ можетъ быть замѣненъ магнитною площадкою, при чемъ работу вычисляютъ также, какъ и при двухъ магнитахъ.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

Явленія индукціи.

Формула Вебера.—Взаимное дѣйствіе двухъ токовъ съ постоянными напряженіями въ неподвижныхъ проводникахъ. — Взаимное дѣйствіе двухъ токовъ съ измѣняющимися напряженіями въ неподвижныхъ проводникахъ. — Индукція тока на самого себя отъ измѣненія напряженія. — Индукція между двумя токами отъ измѣненія напряженія. — Взаимное дѣйствіе двухъ токовъ въ подвижныхъ проводникахъ. — Индукція тока на самого себя отъ измѣненія формы проводника. — Индукція между двумя токами отъ движенія проводниковъ. — Электрическія и индукціонныя машины.

Формула Вебера.

271. Мы разсмотрѣли уже два главныхъ класса электрическихъ явленій: явленія статическаго электричества, подчиняющіяся закону Кулона,

$$(a) \qquad -\frac{mm'}{r^2}$$

и электродинамическія, заключающіяся въ законѣ Ампера (n^0 265),

$$(b) \qquad -\frac{2k\,ii'\,ds\,ds'}{\sqrt{r}}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

Первый законъ опредѣляетъ взаимное дѣйствіе двухъ электрическихъ массъ m, m', находящихся въ покоѣ, а второй — дѣйствіе

двухъ элементовъ тока. Веберу [1]) удалось соединить оба закона въ одинъ общій, охватывающій оба класса явленій. Онъ полагаетъ, что взаимное дѣйствіе двухъ электрическихъ массъ не одно и тоже, будутъ ли онѣ въ движеніи, или находятся въ покоѣ, и нашелъ, что это дѣйствіе выражается формулою:

$$(c) \qquad -mm'\left(\frac{1}{r^2}+\frac{k}{\sqrt{r}}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right)$$

Безъ дальнѣйшаго ясно, что она заключаетъ въ себѣ законъ Кулона, потому что если массы находятся въ покоѣ, то второй членъ равенъ нулю; мы увидимъ также, что въ ней заключается и законъ Ампера. Въ основаніе своихъ разсужденій Веберъ беретъ гипотезу двухъ жидкостей. При такомъ воззрѣніи, токъ напряженія i разсматривается состоящимъ изъ двухъ токовъ противоположныхъ электричествъ, движущихся съ одной и тою же скоростью u въ противоположныхъ направленіяхъ, изъ которыхъ каждый имѣетъ напряженіе $\frac{i}{2}$. Если означимъ ω весьма малое поперечное сѣченіе проводника, а черезъ ρ — плотность электрической жидкости, то количество каждой жидкости, проходящей въ единицу времени чрезъ поперечное сѣченіе проволоки, будетъ равно $\rho\omega u$; а потому для каждаго тока получимъ:

$$\frac{i}{2} = \rho\omega u$$

и, слѣдовательно,

$$i = 2\rho\omega u$$

Элементъ ds проводника содержитъ равныя массы $+m$ и $-m$ положительной и отрицательной жидкостей, а потому

$$m = \rho\omega ds$$

и, слѣдовательно,

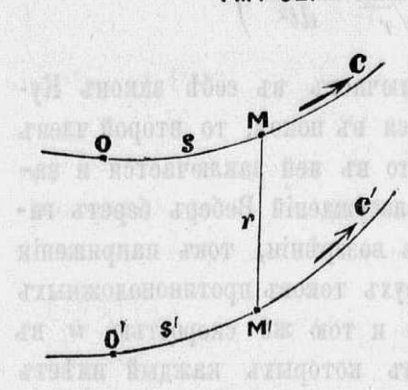
$$(1) \qquad 2mu = ids$$

[1]) W. Weber, Elekrodynamische Maassbestimmungen. Erste Abhandlung, S. 97 до 119.

Взаимное дѣйствіе двухъ токовъ съ постоянными напряженіями въ неподвижныхъ проводникахъ.

272. Разсмотримъ два тока съ постоянными напряженіями i и i' въ неподвижныхъ проводникахъ C и C' и положимъ, что поперечныя сѣченія ω и ω' постоянны; тогда скорости u и u' электричества въ каждомъ проводникѣ будутъ также постоянны. Положеніе массы m положительной жидкости, движущейся въ первомъ изъ нихъ со скоростью u по направленію стрѣлки, въ каждый моментъ опредѣляется дугою s, считая по проводнику отъ неподвижной точки O (фиг. 82). Такимъ же образомъ положеніе массы m' положительной жидкости во второмъ проводникѣ, движущейся со скоростью u' по направленію стрѣлки, опредѣляется дугою s', считая отъ неподвижной точки O' на этомъ проводникѣ. Поэтому на s и s' слѣдуетъ смотрѣть какъ на функціи времени; вслѣдствіе чего

Фиг. 92.



$$\frac{ds}{dt} = u, \frac{ds'}{dt} = u'$$

Разстояніе r двухъ массъ, находящихся въ движеніи, есть функція дугъ s и s', а слѣдовательно и функція времени; тоже самое относится и къ величинѣ $\sqrt{r}$. Дифференцируя одинъ разъ эту сложную функцію, получимъ:

$$(2) \qquad \frac{d\sqrt{r}}{dt} = \frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{ds}{dt} + \frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{ds'}{dt} = u\frac{d\sqrt{r}}{ds} + u'\frac{d\sqrt{r}}{ds'}$$

Частныя производныя $\frac{d\sqrt{r}}{ds}$ и $\frac{d\sqrt{r}}{ds'}$ сами суть функціи отъ s и s', а слѣдовательно и функціи отъ t; поэтому, при второмъ дифференцированіи получимъ:

$$\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = u\left(\frac{d^2\sqrt{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt} + \frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\frac{ds'}{dt}\right) + u'\left(\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt} + \frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}\frac{ds'}{dt}\right)$$

$$(3) \qquad \frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = u^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds^2} + 2uu'\frac{d^2\sqrt{r}}{ds ds'} + u'^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}$$

Если подставить въ формулѣ Вебера вмѣсто $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ ея значеніе, то получимъ дѣйствіе, производимое массою $+m$ на $+m'$:

$$-mm'\left[\frac{1}{r^2} + \frac{k}{\sqrt{r}}\left(u^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds^2} + 2uu'\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} + u'^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}\right)\right]$$

Чтобы получить дѣйствіе, производимое массою $-m$ на $+m'$, — стоитъ только перемѣнить знаки передъ m и u въ предъидущемъ выраженіи, потому что масса $-m$ движется въ противоположномъ направленіи и, слѣдовательно, со скоростью $-u$. Такимъ образомъ, для втораго дѣйствія получимъ:

$$+mm'\left[\frac{1}{r^2} + \frac{k}{\sqrt{r}}\left(u^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds^2} - 2uu'\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} + u'^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}\right)\right]$$

Складывая обѣ эти силы, получимъ общее дѣйствіе на $+m'$, производимое двумя массами $+m$ и $-m$, находящимися въ одномъ и томъ же элементѣ ds проводника C, а именно:

$$-\frac{4kmm'uu'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

Если вмѣстѣ $2mu$ подставимъ ids, и означимъ это дѣйствіе черезъ $\frac{F}{2}$, то

$$(I) \qquad \frac{F}{2} = -\frac{2km'u'ids}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

Чтобы получить общее дѣйствіе двухъ массъ $+m-m$ на массу $-m'$, — достаточно только перемѣнить знаки у m' и u' въ предъидущемъ выраженіи, при чемъ найдемъ туже самую силу $\frac{F}{2}$. Сумма этихъ двухъ силъ

$$F=-\frac{4km'u'ids}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

или

$$F=-\frac{2kii'dsds'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

есть дѣйствіе, производимое элементомъ ds на элементъ ds', и имѣетъ совершенно такое же выраженіе, какъ и (b) для электродинамической силы по Амперу [1]).

273. Въ предъидущемъ мы положили, что каждый изъ проводниковъ по всей своей длинѣ имѣетъ одинаковое поперечное сѣченіе. Если же оно не одинаковое, то ω слѣдуетъ разсматривать какъ функцію отъ s, а скорость u не будетъ уже болѣе одна и таже въ различныхъ мѣстахъ проводника, но будетъ представлять также функцію отъ s. При этомъ скорость массы $+m$, движущейся въ проводникѣ C, будетъ перемѣнная, такъ что получимъ:

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}=u\frac{du}{ds}$$

Для втораго проводника получимъ также:

$$\frac{du'}{dt}=u'\frac{du'}{ds'}$$

Дифференцировавъ только-что выраженіе (2) $\frac{d\sqrt{r}}{dt}$, мы разсматривали u и u' постоянными; но теперь эти величины суть функціи времени, а потому къ выраженію (3) для $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ слѣдуетъ прибавить еще члены:

$$\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}+\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{du'}{dt}$$

или

$$u\frac{du}{ds}\frac{d\sqrt{r}}{ds}+u'\frac{du'}{ds'}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}$$

Если разсматривать дѣйствіе $+m$ или $-m$ на $+m'$, то эти прибавляемые члены исчезнутъ изъ суммы (I), такъ какъ знакъ ихъ внутри скобокъ тотъ же самый, а передъ скобками—противоположный. Поэтому неравенство поперечныхъ сѣченій не измѣняетъ силы $\frac{F}{2}$, дѣйствующей на массу $+m'$ или на $-m'$, и, слѣдовательно, электродинамическая сила F остается тою же самою.

274. Легко видѣть, что всѣ силы $\frac{F}{2}$, взятыя въ совокупности, и дѣйствующія на массу $+m'$, не имѣютъ вліянія на движеніе этой массы въ проводникѣ C'; поэтому проэкція силы $\frac{F}{2}$ на направленіе движенія будетъ:

$$\frac{F}{2}\cos\theta'=-\frac{F}{2}\frac{dr}{ds'}=\frac{2km'u'ids}{\sqrt{r}}\frac{dr}{ds'}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

$$=4km'u'ids\,\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}=2km'u'ids\frac{d\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2}{ds}$$

Сумма проэкцій всѣхъ силъ, производимыхъ различными элементами сомкнутаго тока C на массу $+m'$, будетъ:

$$2km'u'i\int\frac{d\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2}{ds}\,ds=2km'u'i\left[\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2\right]_1^2=0$$

[1]) W. Weber, Elektrodyn. Maassbestimmungen. Erste Abth. S. 119 до 126.

Поэтому составная силъ $\frac{F}{2}$, дѣйствующихъ на массу $+m'$, перпендикулярна къ направленію движенія и, слѣдовательно, не имѣетъ вліянія на движеніе этой массы. Тоже самое относится и къ массѣ $-m$.

Отсюда мы должны заключить, что работа силъ F, дѣйствующихъ между двумя токами съ постоянными напряженіями, равна нулю, если проводники неподвижны.

Тѣже самыя заключенія могутъ быть приложены и къ току съ постояннымъ напряженіемъ, относительно его дѣйствія на самого себя, когда этотъ токъ идетъ по проводнику неизмѣнной формы.

Электродинамическія силы F можно разсматривать такъ, какъ еслибы онѣ дѣйствовали на различные элементы самаго проводника. Поэтому, чтобы воспрепятствовать движенію проводниковъ,—необходимо заставить на нихъ дѣйствовать внѣшнія силы, которыя уравновѣшивали бы электродинамическія.

Законъ Вебера охватываетъ не только законы Кулона и Ампера, но, какъ мы сейчасъ увидимъ, вполнѣ объясняетъ также и явленія индукціи, о которыхъ законъ Ампера можетъ дать лишь необстоятельное и весьма ограниченное понятіе.

Взаимное дѣйствіе двухъ токовъ съ перемѣнными напряженіями въ неподвижныхъ проводникахъ.

275. До сихъ поръ мы предполагали, что напряженія постоянны, а проводники неподвижны; теперь же предположимъ, что хотя проводники C и C' неподвижны, но напряженія i и i' обоихъ токовъ перемѣнны. Если напряженіе i измѣняется съ временемъ, то и скорость u также измѣняется съ временемъ въ одномъ и томъ же мѣстѣ проводника; если, вмѣстѣ съ тѣмъ, и поперечныя сѣченія неодинаковы, то она для того же самаго момента будетъ различна

въ различныхъ мѣстахъ проводника. Поэтому u есть функція отъ s и t. Если будемъ разсматривать движеніе массы $+m$, то

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}+\frac{du}{dt}=u\frac{du}{ds}+\frac{du}{dt}$$

Точно также для втораго проводника получимъ:

$$\frac{du'}{dt'}=u'\frac{du'}{ds'}+\frac{du'}{dt}$$

Поэтому, мы должны прибавить къ выраженію $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ еще члены

$$\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}+\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{du'}{dt}$$

или

$$\frac{d\sqrt{r}}{ds}\left(u\frac{du}{ds}+\frac{du}{dt}\right)+\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\left(u'\frac{du'}{ds'}+\frac{du'}{dt}\right)$$

или

$$\left(u\frac{du}{ds}\frac{d\sqrt{r}}{ds}+u'\frac{du'}{ds'}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)+\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}+\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{du'}{dt}\right)$$

Первый членъ относится къ неравенству поперечныхъ сѣченій и, какъ мы уже видѣли, исчезаетъ изъ результата.—Изслѣдуемъ теперь вторую часть, относящуюся къ измѣненію напряженія. Если разсматривать дѣйствія $+m$ и $-m$ на $+m'$, то членъ $\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}$ измѣнитъ свой знакъ въ скобкахъ, а членъ $\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{du'}{dt}$, напротивъ того, сохранитъ его. Такъ какъ знакъ передъ скобками измѣняется, то послѣдній членъ пропадетъ изъ суммы, а первый останется. Поэтому дѣйствіе массъ $+m$ и $-m$ на $+m'$ будетъ:

$$\frac{F}{2}+E=-\frac{4kmm'uu'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}-\frac{2kmm'}{\sqrt{r}}\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}$$

Дѣйствіе же двухъ массъ $+m$ и $-m$ на $-m'$ будетъ:

$$\frac{F}{2} - E = -\frac{4kmm'uu'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} + \frac{2kmm'}{\sqrt{r}}\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}$$

276. Въ послѣдующемъ мы предположимъ, что плотность ρ жидкости постоянна и что, слѣдовательно, измѣненіе напряженія соотвѣтствуетъ измѣненію скорости жидкости. Изъ отношенія $i = 2\rho\omega u$ (n^0 271) выходитъ, что

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\rho\omega}\frac{di}{dt}, \quad 2m\frac{du}{dt} = ds\frac{di}{dt}$$

а потому

$$(I) \qquad \frac{F}{2} = -\frac{2km'u'ids}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

$$(II) \qquad E = -\frac{km'ds}{\sqrt{r}}\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{di}{dt}$$

И такъ, элементъ ds перваго тока производитъ на массу $+m'$ дѣйствіе, равное суммѣ двухъ силъ $\frac{F}{2}$ и E, а на массу $-m'$ — дѣйствіе, равное ихъ разности $\frac{F}{2} - E$.

Сумма этихъ двухъ дѣйствій есть электродинамическая силъ F, дѣйствующая между элементами ds и ds'. И такъ, измѣненіе напряженія не измѣняетъ выраженія этой силы.

Равнодѣйствующая силъ $\frac{F}{2}$, дѣйствующихъ на $+m'$ или на $-m'$, какъ мы видѣли, нормальна къ траекторіи и, слѣдовательно, не имѣетъ вліянія на движеніе этихъ массъ. Она производитъ только давленіе на изолирующую оболочку и есть то, что̀ называется электродинамическою силою. Ее разсматриваютъ такъ, какъ еслибы она была приложена къ самому проводнику.

Но это же самое не пригодно для силъ $+E$, дѣйствующихъ

на $+m'$, и для силъ $-E$, дѣйствующихъ на $-m'$. Онѣ, лучше сказать, имѣютъ равныя, но противоположныя равнодѣйствующія, не нормальныя къ траекторіи; вслѣдствіе чего онѣ стремятся двигать обѣ массы въ противоположномъ направленіи, и потому представляютъ электровозбудительную силу.

277. Вычислимъ теперь работу этихъ силъ. Работа силы E, дѣйствующей на движущуюся массу $+m'$ во время dt, будетъ:

$$E\cos\theta' \times u'dt = -\frac{km'u'ds\,dt}{2r}\cos\theta\cos\theta'\frac{di}{dt}$$

Работа же равнодѣйствующей такихъ силъ —

$$-\frac{k}{2}m'u'\frac{di}{dt}dt\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}ds$$

Работа силъ $-E$, дѣйствующихъ на массу $-m'$, равна предъидущей и съ такимъ же знакомъ. Поэтому работа силъ $+E$, дѣйствующихъ на двѣ массы $+m'$ и $-m'$, заключающіяся въ элементѣ ds', будетъ:

$$-km'u'\frac{di}{dt}dt\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}ds$$

или

$$-\frac{k}{2}i'ds'\frac{di}{dt}dt\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}ds$$

Такимъ образомъ работа относительно всѣхъ электрическихъ массъ, движущихся въ проводникѣ C', будетъ:

$$(4) \qquad -\frac{k}{2}i'di\iint\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}ds\,ds' = -Wi'di$$

гдѣ W есть потенціалъ относительно взаимнаго дѣйствія двухъ токовъ съ 1 напряженіемъ, проходящихъ по обоимъ проводникамъ (n^0 267). Это есть работа силъ E, дѣйствующихъ на токъ C'. Она происходитъ отъ измѣненія напряженія тока C. Работа же тѣхъ силъ, которыя дѣйствуютъ на токъ C, есть $-Wi\,di'$; она проис-

ходитъ отъ измѣненія напряженія тока C'. Для работы взаимнаго дѣйствія двухъ токовъ получимъ сумму двухъ вышеозначенныхъ работъ, т. е. $-Wd(ii')$.

278. Тѣже самыя разсужденія могутъ быть приложены и къ дѣйствіямъ, производимымъ перемѣннымъ токомъ въ неподвижномъ проводникѣ на самого себя. При этомъ стоитъ только положить, что оба тока, взаимное дѣйствіе которыхъ хотимъ опредѣлить, равны и совнадаютъ между собою. Работа силъ E, происходящая отъ дѣйствія тока C' на токъ C, есть $-Widi$; но здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что въ интегралѣ W каждая пара элементовъ a и b встрѣчается дважды: одинъ разъ, когда разсматриваемъ a принадлежащихъ къ первому проводнику, а b — ко второму; другой разъ наоборотъ, когда принимаемъ b принадлежащимъ къ первому, а a — ко второму. Поэтому, если положимъ

$$w = \frac{k}{2} \sum \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r} ds\, ds' \tag{5}$$

и возьмемъ каждую пару элементовъ только одинъ разъ, то $W=2w$, а работа, производимая токомъ на самого себя, выразится посредствомъ $-2widi$ или $-d(wi^2)$.

Величину i^2w мы называемъ потенціальною энергіею тока. Она есть то количество работы, которое производитъ токъ, когда онъ предоставленъ самому себѣ и напряженіе его убываетъ до нуля. Наоборотъ, для того чтобы произвести данный токъ, необходимо израсходовать количество работы или химическаго дѣйствія, равное потенціальной энергіи тока.

Само собою разумѣется, что потенціалъ w тока — величина положительная. Безъ дальнѣйшаго это ясно, когда проводникъ представляетъ кругъ, потому что въ такомъ случаѣ для каждой пары элементовъ оба угла θ и θ' равны.

Потенціальная энергія системы изъ двухъ токовъ равна $i^2w + i'^2w' + ii'W$.

Индукція тока на самого себя отъ измѣненія напряженія.

279. Пусть въ сомкнутый и неподвижный проводникъ будетъ введенъ непостоянный столбъ. Энергія, доставляемая этимъ столбомъ во время dt, есть $na\,Eqi\,dt$ (n^0 236) или, проще, $Hidt$, если H означаетъ величину $naEq$. Работа внутреннихъ силъ $-d(i^2w)$, а внѣшнихъ, дѣлающихъ проводникъ неподвижнымъ, равна нулю. Поэтому теорема живыхъ силъ дастъ уравненіе:

$$dA + \lambda i^2 dt = Hidt - d(i^2w) \tag{6}$$

въ которомъ первый членъ означаетъ приращеніе живой силы электрическихъ массъ, а второй — тепловую энергію, сообщаемую вѣсомымъ частицамъ. Такимъ образомъ лѣвая часть представляетъ приращеніе живой силы всей системы. Если пренебречь, какъ прежде, живою силою электрическихъ массъ, то это уравненіе будетъ:

$$Hidt = \lambda i^2 dt + d(i^2w) \tag{7}$$

Оно показываетъ, что химическое дѣйствіе столба равно развивающейся въ проводникѣ тепловой энергіи, плюсъ приращенію потенціальной энергіи тока.

Если проинтегрировать отъ момента начала тока до его прекращенія, то получимъ:

$$\int Hidt = \int \lambda i^2 dt$$

И такъ, химическое дѣйствіе столба равно теплотѣ, развивающейся въ проводникѣ.

280. Изъ уравненія (7) слѣдуетъ, что

$$i = \frac{H}{\lambda} - \frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt} \tag{8}$$

Если столбъ постоянный, то напряженіе тока будетъ

$$i_1 = \frac{H}{\lambda}$$

Далѣе, изъ уравненія (8) видно, что если H увеличивается, то i также увеличивается, но будетъ постоянно менѣе i_1; если же H уменьшается, то i также уменьшается, оставаясь постоянно болѣе i_1.

Положимъ, для краткости, $\frac{2w}{\lambda} = a$; тогда уравненіе (8) будетъ:

$$i = i_1 - a\frac{di}{dt}$$

а развернутый въ строку интегралъ есть

$$(9) \qquad i = i_1 - a\frac{di_1}{dt} + a^2\frac{d^2 i_1}{dt^2} - \ldots.$$

Индукція между двумя токами отъ измѣненія напряженія.

281. Разсмотримъ теперь два сомкнутыхъ и неподвижныхъ проводника C и C', въ которые введены два непостоянные столба H и H'. Пусть w и w' будутъ потенціалы проводниковъ на самихъ себя, а W — потенціалъ относительно ихъ взаимнаго дѣйствія.

Работа внѣшнихъ силъ, удерживающихъ проводники неподвижными, есть нуль. Работа электрическихъ силъ, дѣйствующихъ на первый токъ, будетъ

$$-d(i^2 w) - Widi'$$

Работа силъ, дѣйствующихъ на второй токъ, есть

$$-d(i'^2 w') - Wi'di$$

Поэтому, по теоремѣ живыхъ силъ, получимъ два уравненія:

$$dA + \lambda i^2 dt = Hidt - d(i^2 w) - Widi'$$

$$dA' + \lambda' i'^2 dt = H' i' dt - d(i'^2 w') - Wi'di$$

или, пренебрегая живыми силами электрическихъ массъ, —

$$(10) \qquad \begin{cases} Hidt = \lambda i^2 dt + d(i^2 w) + Widi' \\ H'i'dt = \lambda' i'^2 dt + d(i'^2 w') + Wi'di \end{cases}$$

Складывая почленно эти два уравненія, получимъ уравненіе:

$$(11) \qquad Hidt + H'i'dt = \lambda i^2 dt + \lambda' i'^2 dt + d(i^2 w + i'^2 w' + ii'W)$$

которое можно было бы составить a priori. Оно означаетъ, что сумма химическихъ дѣйствій столбовъ равна тепловой энергіи, развивающейся въ обоихъ проводникахъ, плюсъ приращенію потенціальэнергіи системы. Если проинтегрировать отъ момента начала токовъ до ихъ прекращенія, то химическое дѣйствіе столбовъ будетъ равно тепловой энергіи, освобождающейся въ проводникахъ.

282. Изъ уравненій (10) слѣдуетъ:

$$(12) \qquad \begin{cases} i = i_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt} - \frac{W}{\lambda}\frac{di'}{dt} \\ i' = i'_1 - \frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'}{dt} - \frac{W}{\lambda'}\frac{di}{dt} \end{cases}$$

если i_1 и i'_1 означаютъ $\frac{H}{\lambda}$ и $\frac{H'}{\lambda'}$.

Если столбы постоянны, то напряженія токовъ также постоянны и равны i_1 и i'_1; если же столбы не постоянны, то напряженія i_1 и i'_1 различны, а происходящее дѣйствіе индукціи — весьма запутано. Развертывая интегралъ въ строку, получимъ:

$$(13) \qquad \begin{cases} i = i_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di_1}{dt} - \frac{W}{\lambda}\frac{di'_1}{dt} + \ldots. \\ i' = i'_1 - \frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'_1}{dt} - \frac{W}{\lambda'}\frac{di_1}{dt} + \ldots. \end{cases}$$

Чтобы, по возможности, легче составить себѣ понятіе о законѣ этого явленія, мы ограничимся тѣмъ случаемъ, когда столбъ не введенъ во второй проводникъ; тогда уравненія (12) сведутся на

$$(14) \qquad \begin{cases} i = i_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt} - \frac{W}{\lambda}\frac{di'}{dt} \\ i' = -\frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'}{dt} - \frac{W}{\lambda'}\frac{di}{dt} \end{cases}$$

а интегралы ихъ — на

$$(15)\quad \left| \begin{array}{l} i' = -\frac{W}{\lambda'}\frac{di_1}{dt} + \dots \\ i = i_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di_1}{dt} + \dots \end{array} \right.$$

Для опредѣленія значенія W мы принимали положительнымъ то̀ направленіе въ проводникѣ C, которое имѣетъ токъ i. Въ проводникѣ же C' примемъ положительнымъ то̀ направленіе, при которомъ W получаетъ положительное значеніе; при этомъ вышеприведенныя уравненія показываютъ, что уменьшеніе напряженія тока i возбуждаетъ въ проводникѣ C' токъ того направленія, при которомъ W будетъ положительнымъ; увеличеніе же — производитъ токъ противоположнаго направленія. Коль скоро индуктирующій токъ i будетъ постояннымъ, то i' сдѣлается равнымъ нулю, и индуктированный токъ прекратится.

Взаимное дѣйствіе двухъ токовъ въ подвижныхъ проводникахъ.

283. Сначала мы изслѣдовали взаимное дѣйствіе двухъ токовъ съ перемѣннымъ напряженіемъ въ неподвижныхъ проводникахъ; теперь же разсмотримъ болѣе общій случай, предполагая проводники подвижными. Движеніе электрической массы $+m$ въ проводникѣ C опредѣляется уравненіемъ $s = f(t)$ (n^0 272); такимъ же образомъ движеніе массы $+m'$ — уравненіемъ $s' = f_1(t)$; вслѣдствіе чего получимъ:

$$u = \frac{ds}{dt}\quad,\quad u' = \frac{ds'}{dt}$$

Если проводники неподвижны, то разстояніе r двухъ точекъ M и M' этихъ проводниковъ есть функція двухъ перемѣнныхъ независимыхъ s и s'; если же проводники подвижны, то это разстояніе, кромѣ того, есть функція времени, и, слѣдовательно, $r = \varphi(s, s', t)$. Эта функція трехъ перемѣнныхъ независимыхъ s, s', t имѣетъ то

свойство, что (если принять t за постоянную величину) она, какъ функція только двухъ перемѣнныхъ независимыхъ s и s', представляетъ разстояніе двухъ произвольныхъ точекъ M и M' проводниковъ въ разсматриваемый моментъ. Эта функція $r = \varphi(s, s', t)$ будетъ представлять также разстояніе двухъ электрическихъ массъ $+m$ и $+m'$, движущихся въ этихъ подвижныхъ проводникахъ если на s и s' смотрѣть какъ на функціи времени:

$$s = f(t)\quad,\quad s' = f_1(t)$$

Такимъ образомъ получимъ, что

$$\sqrt{r} = \sqrt{\varphi(s, s', t)} = \psi(s, s', t)$$

Точно также слѣдуетъ поступать, если желаемъ приложить формулу Вебера.

284. Дифференцируя одинъ разъ, получимъ:

$$\frac{d\sqrt{r}}{dt} = \frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{ds}{dt} + \frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{ds'}{dt} + \frac{d\sqrt{r}}{dt}$$

или

$$(16)\quad \frac{d\sqrt{r}}{dt} = u\frac{d\sqrt{r}}{ds} + u'\frac{d\sqrt{r}}{ds'} + \frac{d\sqrt{r}}{dt}$$

Каждую изъ частныхъ производныхъ $\frac{d\sqrt{r}}{ds}$, $\frac{d\sqrt{r}}{ds'}$, $\frac{d\sqrt{r}}{dt}$ функціи $\sqrt{r} = \psi(s, s', t)$ опять-таки слѣдуетъ разсматривать какъ функцію трехъ величинъ s, s', t. Слѣдовательно, дифференцируя еще разъ, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = {} & u\left(\frac{d^2\sqrt{r}}{ds^2}\frac{ds}{dt} + \frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\frac{ds'}{dt} + \frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,dt}\right) \\ & + u'\left(\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'\,ds}\frac{ds}{dt} + \frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}\frac{ds'}{dt} + \frac{d^2\sqrt{r}}{ds'\,dt}\right) \\ & + \left(\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds}\frac{ds}{dt} + \frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds'}\frac{ds'}{dt} + \frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right) \\ & + \frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt} + \frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{du'}{dt} \end{aligned}$$

или

$$\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}=\left(u^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds^2}+2uu'\frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'}+u'^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}\right)$$

$$+\left(2u\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds}+2u'\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds'}+\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right)$$

$$+\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}+\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{du'}{dt}\right)$$

Если поперечныя сѣченія въ различныхъ мѣстахъ проводниковъ не одинаковы, то u есть функція отъ s и t; u' — функція отъ s' и t, какъ мы видѣли это раньше (n^0 273); поэтому

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}+\frac{du}{dt}=u\frac{du}{ds}+\frac{du}{dt},\quad \frac{du'}{dt}=u'\frac{du'}{ds'}+\frac{du'}{dt}$$

Слѣдовательно,

$$(17)\quad\left|\begin{aligned}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}=&\left(u^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds^2}+2uu'\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}+u'^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}\right)\\&+\left(2u\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds}+2u'\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds'}+\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right)\\&+\left(u\frac{du}{ds}\frac{d\sqrt{r}}{ds}+u'\frac{du'}{ds'}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)\\&+\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}+\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{du'}{dt}\right)\end{aligned}\right.$$

Если разсматривать совокупныя дѣйствія $+m$ и $-m$ на $+m'$, то отъ $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ останутся только слѣдующіе три члена:

$$2uu'\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}+\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}+2u\frac{d^2\sqrt{r}}{dtds}$$

измѣняющіе свой знакъ вмѣстѣ съ u, остальные же пропадутъ, потому что, для полученія соотвѣтствующаго выраженія $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ для $-m$, необходимо перемѣнить знаки передъ m и u. Такимъ образомъ для дѣйствія двухъ массъ $+m$ и $-m$, заключающихся въ элементѣ ds, на $+m'$ найдемъ:

$$\frac{F}{2}+E+E'=-\frac{4kmm'uu'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'}-\frac{2kmm'}{\sqrt{r}}\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}$$

$$-\frac{4kmm'u}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds}$$

Дѣйствіе тѣхъ же самыхъ массъ $+m$ и $-m$ на $-m'$ будетъ:

$$\frac{F}{2}-E-E'=-\frac{4kmm'uu'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}+\frac{2kmm'}{\sqrt{r}}\frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{du}{dt}$$

$$+\frac{4kmm'u}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt\,ds}$$

И такъ, мы снова получили двѣ силы $\frac{F}{2}$ и $\pm E$, которыя нашли уже раньше (n^0 275); но, вслѣдствіе подвижности проводника, является еще третья сила:

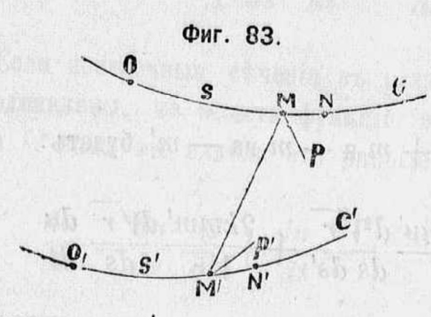
$$(III)\qquad E'=-\frac{2km'ids}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dtds}$$

Сумма силъ, произведенныхъ элементомъ ds на двѣ массы $+m'$ и $-m'$, заключающихся въ элементѣ ds' все-таки равна F. Это и есть электродинамическая сила, выраженіе которой остается тоже самое. Теперь же, напротивъ того, мы имѣемъ двѣ электровозбудительныя силы: одну $\pm E$, происходящую отъ измѣненія напряженія, и другую $\pm E'$, происходящую отъ перемѣщенія проводниковъ.

285. Опредѣлимъ теперь работу, предполагая извѣстныя обстоятельства. Пусть v и v' будутъ скорости точекъ M и M' на про-

водникахъ, ψ — уголъ между скоростью v и направленіемъ MM, ψ' — уголъ между скоростью v' и направленіемъ $M'M$ (фиг. 83). Электрическая масса $+m$ имѣетъ двойное движеніе: во первыхъ, она движется въ проводникѣ C со скоростью u и, во вторыхъ, принимаетъ участіе въ движеніи проводника, который увлекаетъ ее собою. Поэтому перемѣщеніе ея во время dt есть составное изъ двухъ перемѣщеній: $MN = udt$ и $MP = vdt$. Перемѣщеніе массы $-m$ будетъ также составное изъ двухъ перемѣщеній: $-udt$ и vdt. Электрическія массы $+m'$ и $-m'$ тоже имѣютъ двойное движеніе, а именно: соотвѣтствующее имъ движеніе въ проводникѣ C' и движеніе проводника, увлекающаго ихъ собою. Поэтому, перемѣщеніе массы $+m'$ во время dt будетъ составное изъ двухъ перемѣщеній: $M'N' = u'dt$ и $M'P' = v'dt$; перемѣщеніе же

Фиг. 83.



массы $-m'$ — составное изъ перемѣщеній $-u'dt$ и $v'dt$.

Извѣстно, что работа силы для составнаго перемѣщенія равна суммѣ работъ для соотвѣтствующихъ составляющихъ перемѣщеній. Но, мы видѣли (n^0 274), что равнодѣйствующая силъ $\frac{F}{2}$, дѣйствующихъ на массу $+m'$ и происходящая отъ всѣхъ элементовъ сомкнутаго проводника C, перпендикулярна къ проводнику C' и, слѣдовательно, что работа этой равнодѣйствующей для всякаго перемѣщенія $u'dt$ равна нулю. Напротивъ того, работа для перемѣщенія $v'dt$ равна

$$-2km'u'iv'dt \int \frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} \frac{\cos\psi'}{\sqrt{r}}\,ds$$

Равнодѣйствующая силъ $\frac{F}{2}$, дѣйствующихъ на массу $-m'$, равна вышеразсмотрѣнной по величинѣ и по направленію и такимъ же образомъ для перемѣщенія $-u'dt$ дастъ работу нуль, и туже самую работу для перемѣщенія $v'dt$. Поэтому работа силъ $\frac{F}{2}$, дѣй-

ствующихъ на двѣ массы $+m'$ и $-m'$, заключающіяся въ элементѣ ds', будетъ

$$-2kii'v'dtds' \int \frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} \frac{\cos\psi'}{\sqrt{r}}\,ds$$

Слѣдовательно, работа силъ $\frac{F}{2}$, дѣйствующихъ на всѣ массы, находящіяся въ проводникѣ C', есть

$$\textbf{(18)} \qquad dLFC' = -2kii'dt \iint \frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} \frac{v'\cos\psi'}{\sqrt{r}}\,ds\,ds'$$

Работа тѣхъ же силъ, дѣйствующихъ на всѣ электрическія массы въ проводникѣ C, будетъ

$$\textbf{(19)} \qquad dLFC = -2kii'dt \iint \frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} \frac{v\cos\psi}{\sqrt{r}}\,ds\,ds'$$

Ясно, что сумма этихъ двухъ работъ есть работа электродинамическихъ силъ въ системѣ двухъ проводниковъ, работа, для которой мы уже нашли значеніе $ii'W$ (n^0 267). Весьма легко показать такое согласіе, потому что

$$v\cos\psi + v'\cos\psi' = -\frac{dr}{dt}$$

вслѣдствіе чего сумма двухъ предъидущихъ работъ тожественна съ выраженіемъ (33) въ n^0 266.

Силы $+E$ и $-E$, дѣйствующія на массы $+m'$ и $-m'$, для перемѣщенія $v'dt$ дадутъ равныя, но противоположныя по знаку работы. Вслѣдствіе чего, при вычисленіи работы этихъ силъ, мы можемъ совершенно не обращать вниманія на движеніе проводниковъ, при чемъ будемъ имѣть тотъ же самый случай, о которомъ уже говорили въ n^0 277. Такимъ образомъ, работа силъ $\pm E$, дѣйствующихъ на токъ C', во время dt равна $-Wi'di$, а на токъ C она равна $-Widi'$; поэтому общая работа будетъ $-Wd(ii')$.

286. Силы $+E'$ и $-E'$, дѣйствующія на массы $+m'$ и $-m'$, для перемѣщенія $v'dt$ также даютъ равныя, но съ противоположными знаками работы, а потому мы можемъ не обращать вниманія

на перемѣщеніе проводника C'. Напротивъ того, работа силы E' дѣйствующей на массу $+m'$, для перемѣщенія $u'dt$ будетъ

$$E' \cos \theta' \times u'dt = \frac{2km'u'idtds}{\sqrt{r}} \frac{dr}{ds'} \frac{d^2\sqrt{r}}{dtds}$$

$$= 4km'u'idtds \frac{d\sqrt{r}}{ds'} \frac{d^2\sqrt{r}}{dtds}$$

Слѣдовательно, работа равнодѣйствующей силъ $+E'$ есть

$$4km'u'idt \int \frac{d\sqrt{r}}{ds'} \frac{d^2\sqrt{r}}{dtds} ds$$

Равнодѣйствующая силъ $-E'$, дѣйствующихъ на $-m'$, дастъ работу такую же по величинѣ и по знаку, такъ что работа силъ $+E'$ и $-E'$, дѣйствующихъ на двѣ массы $+m'$ и $-m'$, заключающіяся въ элементѣ ds', будетъ

$$4kii'dtds' \int \frac{d\sqrt{r}}{ds'} \frac{d^2\sqrt{r}}{dtds} ds$$

Слѣдовательно, работа силъ $\pm E$, дѣйствующихъ на весь токъ C', есть

$$4kii'dt \iint \frac{d\sqrt{r}}{ds'} \frac{d^2\sqrt{r}}{dtds} dsds'$$

Такъ какъ проводники сомкнуты, то, интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\int \frac{d\sqrt{r}}{ds'} \frac{d^2\sqrt{r}}{dtds} ds = -\int \frac{d\sqrt{r}}{dt} \frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'} ds$$

а потому предъидущее выраженіе перейдетъ въ

$$(20) \qquad -4kii'dt \iint \frac{d\sqrt{r}}{dt} \frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'} dsds'$$

Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ (33) въ n^0 266, увидимъ, что работа силъ $\pm E$, дѣйствующихъ на токъ C', равна

работѣ электродинамическихъ силъ, но имѣетъ противоположный знакъ; поэтому значеніе ея будетъ $-ii'dW$. Работа же силъ $\pm E'$, дѣйствующихъ на токъ C, имѣетъ тоже самое значеніе $-ii'dW$.

Такимъ образомъ работа силъ во время dt, съ которыми токъ C' дѣйствуетъ на C, будетъ:

$$(21) \qquad dLFC - Widi' - ii'dW = dLFC - id(i'W)$$

а работа силъ, производимыхъ токомъ C на C', —

$$(22) \qquad dLFC' - Wi'di - ii'dW = dLFC' - i'd(iW)$$

Сумма этихъ двухъ работъ, т. е. работа взаимнодѣйствія двухъ токовъ, будетъ:

$$(23) \qquad ii'dW - id(i'W) - i'd(iW) = -d(ii'W)$$

Индукція тока на самого себя отъ измѣненія формы проводника.

287. Предъидущія разсужденія могутъ быть приложены и къ дѣйствію тока на самого себя, если проводникъ измѣняетъ свою форму, какъ гибкая проволока, при чемъ, однако, длина его остается постоянною, или когда онъ состоитъ изъ нѣсколькихъ твердыхъ частей, движущихся относительно другъ друга. Положимъ, какъ въ n^0 278, что оба тока равны и совпадаютъ. Замѣтимъ, что работа каждой пары элементовъ берется дважды. Полагая $2w$ вмѣсто W и дѣля на 2, мы для работы электродинамическихъ силъ получимъ i^2dw, а для работы всѣхъ силъ, производимыхъ токомъ на самого себя, $-d(i^2w)$. Мы и здѣсь удержимъ для величины i^2w названіе потенціальной энергіи тока.

Электродинамическія силы слѣдуетъ разсматривать такъ, какъ еслибы онѣ были приложены къ самому проводнику; кромѣ того, на проводникъ дѣйствуютъ внѣшнія силы. Слѣдовательно, видимое движеніе проводника опредѣляется электродинамическими и внѣшними силами, а потому

$$(24) \qquad dB = i^2dw + dL\ ext.$$

гдѣ B означаетъ видимую живую силу проводника. Съ другой стороны, разсматривая токъ и проводникъ въ совокупности, получимъ:

$$dB + dA + \lambda i^2 dt = Hidt - d(i^2 w) + dL\,ext.$$

или, вслѣдствіе предъидущей формулы,

$$dA + \lambda i^2 dt = Hidt - d(i^2 w) - i^2 dw$$

а пренебрегая живою силою A электрическихъ массъ, —

$$(25) \qquad Hidt = \lambda i^2 dt + d(i^2 w) + i^2 dw$$

288. Изъ уравненія (24) выходитъ, что

$$i^2 dw = dB - dL\,ext.$$

Это уравненіе показываетъ, что работа $i^2 dw$ электродинамическихъ силъ равна внѣшней работѣ, произведенной или пріобрѣтенной аппаратомъ, плюсъ измѣненію видимой живой силы проводника. Чтобы выразить сказанное проще, мы включимъ измѣненіе видимой живой силы во внѣшнюю работу, разсматривая его какъ произведенную или пріобрѣтенную роботу, если оно будетъ положительное или отрицательное. Тогда мы можемъ сказать вообще, что работа электродинамическихъ силъ равна внѣшней работѣ, произведенной или пріобрѣтенной аппаратомъ. Слѣдовательно, уравненіе (25) показываетъ, что химическое дѣйствіе столба равно тепловой энергіи, развивающейся въ проводникѣ, плюсъ приращенію потенціальной энергіи тока, плюсъ произведенной или пріобрѣтенной внѣшней работѣ.

Далѣе, изъ уравненія (25) слѣдуетъ:

$$(26) \qquad i = i_1 - \frac{2}{\lambda}\frac{d(iw)}{dt}$$

Отсюда мы видимъ, что увеличеніе потенціала w производитъ уменьшеніе напряженія тока и обратно: уменьшеніе потенціала производитъ увеличеніе напряженія тока. Развертывая напряженіе i въ строку, получимъ:

$$(27) \qquad i = i_1 - \frac{2}{\lambda}\frac{d(i_1 w)}{dt} + \frac{4}{\lambda^2}\frac{d\left[w\frac{d(i_1 w)}{dt}\right]}{dt} - \dots$$

Индукція между двумя токами отъ движенія проводниковъ.

289. Имѣя въ виду опредѣленный случай, положимъ, что оба проводника будутъ неизмѣнной формы, и, слѣдовательно, играютъ роль твердыхъ тѣлъ, а относительное положеніе ихъ измѣняется. Вслѣдствіе такого движенія, какъ мы видѣли, происходятъ электровозбудительныя силы $\pm E'$, измѣняющія напряженія токовъ, вызванныхъ введенными въ проводники столбами H и H'. Электродинамическія силы, производимыя токами другъ на друга, слѣдуетъ разсматривать такъ, какъ еслибы онѣ были приложены къ самимъ проводникамъ; кромѣ того, на проводники дѣйствуютъ еще внѣшнія силы. Видимое движеніе твердыхъ тѣлъ C и C' опредѣляется дѣйствующими на нихъ электродинамическими и внѣшними силами; слѣдовательно, получимъ:

$$dB = dLFC + dL\,ext.\,C$$

$$dB' = dLFC' + dL\,ext.\,C'$$

а потому

$$dB + dB' = ii'dW + dL\,ext.$$

Послѣдній членъ правой части означаетъ работу внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на оба проводника. Отсюда выходитъ, что

$$ii'dW = dB + dB' - dL\,ext.$$

Если включимъ, какъ прежде, измѣненіе видимаго движенія въ измѣненіе внѣшней работы, то можемъ сказать также, что работа $ii'dW$ электродинамическихъ силъ равна внѣшней работѣ, произведенной или пріобрѣтенной аппаратомъ.

Обратимъ теперь вниманіе на проводникъ C и на протекающій въ немъ токъ i. Если приложимъ къ обоимъ теорему живыхъ силъ, то получимъ уравненіе:

$$dB + dA + \lambda i^2 dt = Hidt - d(i^2 w) + dLFC - id(i'W) + dL\,ext.\,C$$

Лѣвая часть этого уравненія содержитъ измѣненіе всей живой силы, правая же — химическое дѣйствіе перваго столба, работу тока на

самого себя (n^0 287), работу втораго тока на первый (n^0 286) и, наконецъ, работу внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на первый проводникъ. Вслѣдствіе одного изъ предъидущихъ уравненій это уравненіе сведется на

$$dA + \lambda i^2 dt = Hidt - d(i^2 w) - id(i' W)$$

а пренебрегая живою силою электрическихъ массъ, — на

$$(28) \qquad Hidt = \lambda i^2 dt + d(i^2 w) + id(i' W)$$

Такимъ же образомъ для втораго тока найдемъ:

$$(29) \qquad H'i'dt = \lambda' i'^2 dt + d(i'^2 w') + i'd(iW)$$

Складывая оба уравненія почленно, получимъ:

$$(30) \quad Hidt + H'i'dt = \lambda i^2 dt + \lambda' i'^2 dt + d(i^2 w + i'^2 w' + ii' W) + ii' dW$$

Это уравненіе показываетъ, что сумма химическихъ дѣйствій, произведенныхъ столбами, равна тепловой энергіи, развивающейся въ обоихъ проводникахъ, плюсъ приращенію потенціальной энергіи системы, плюсъ произведенной или пріобрѣтенной внѣшней работѣ.

290. Потенціалы w и w' двухъ твердыхъ проводниковъ постоянны; поэтому изъ уравненій (28) и (29) выходитъ, что

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} i &= i_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt} - \frac{1}{\lambda}\frac{d(i'W)}{dt} \\ i' &= i'_1 - \frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'}{dt} - \frac{1}{\lambda'}\frac{d(iW)}{dt} \end{aligned} \right.$$

при чемъ i_1 и i'_1 опять-таки представляютъ значенія $\frac{H}{\lambda}$ и $\frac{H'}{\lambda'}$.

Для показанія согласія этого втораго рода индукціи съ предъидущими разсужденіями, мы примемъ столбы постоянными. При этомъ, если не существуетъ относительнаго движенія, то W постоянно, а напряженія принимаютъ постоянныя величины i_1 и i'_1. Тоже самое случится при прохожденіи аппарата черезъ положеніе, въ которомъ потенціалъ W будетъ maximum или minimum, потому что если

производная $\frac{dW}{dt}$ равна нулю, то уравненія (31) удовлетворятся при $i = i_1$, $i' = i'_1$, $\frac{di}{dt} = 0$, $\frac{di'}{dt} = 0$.

Развернутые въ строку интегралы уравненій (31) будутъ:

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} i &= i_1 - \frac{i'_1}{\lambda}\frac{dW}{dt} + \ldots \\ i' &= i'_1 - \frac{i_1}{\lambda'}\frac{dW}{dt} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Индукція токовъ другъ на друга уменьшаетъ или увеличиваетъ ихъ напряженія, смотря потому, увеличивается ли потенціалъ W или уменьшается. Дѣйствіе будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ больше $\frac{dW}{dt}$ по абсолютной величинѣ, т. е. чѣмъ быстрѣе совершается движеніе.

291. Въ особомъ случаѣ, когда столбъ совершенно не введенъ во второй проводникъ, уравненія (31) сведутся на

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} i &= i_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt} - \frac{1}{\lambda}\frac{d(i'W)}{dt} \\ i' &= -\frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'}{dt} - \frac{1}{\lambda'}\frac{d(iW)}{dt} \end{aligned} \right.$$

а ихъ интегралы — на

$$i' = -\frac{i_1}{\lambda'}\frac{dW}{dt} + \ldots$$

$$i = i_1 + \frac{i_1}{2\lambda\lambda'}\frac{d^2W^2}{dt^2} + \ldots$$

Положимъ, какъ въ n^0 282, что, при опредѣленіи W, положительнымъ разсматривается направленіе тока i въ проводникѣ C, а въ C' — то направленіе, при которомъ потенціалъ получаетъ положительное значеніе. Отсюда выходитъ, что уменьшеніе потенціала W возбуждаетъ въ проводникѣ C' токъ того же направленія, а

увеличенiе — производитъ токъ противоположнаго направленiя. Такимъ образомъ, увеличенiе или уменьшенiе потенцiала имѣетъ тоже самое слѣдствiе, какъ и увеличенiе или уменьшенiе напряженiя тока въ индуктирующемъ проводникѣ (n^0 281). Эти законы подтверждаются опытомъ.

Электрическiе двигатели и индукцiонныя машины.

292. Только что разсмотрѣнный нами аппаратъ, состоящiй изъ двухъ подвижныхъ проводниковъ, въ которыхъ циркулируютъ токи i и i', можетъ служить двигателемъ. Положимъ, что движенiе проводниковъ перiодическое, какъ это бываетъ въ бо́льшей части машинъ. Когда видимая живая сила проводниковъ снова прiобрѣтетъ тоже самое значенiе, то работа электродинамическихъ силъ въ каждый перiодъ будетъ равна работѣ внѣшнихъ силъ, но съ обратнымъ знакомъ. Для вычисленiя потенцiала W, представимъ себѣ два тока съ однимъ напряженiемъ, изъ которыхъ первый проходитъ въ проводникѣ C по направленiю тока i, а второй — по произвольно выбранному направленiю въ проводникѣ C'. При этомъ ясно, что потенцiалъ W втеченiе перiода проходитъ черезъ minimum W_1 и черезъ maximum W_2. Чтобы машина работала съ пользою, — необходимо поперемѣнно измѣнять знакъ у одного изъ токовъ, напр. у i'. Если машина переходитъ изъ положенiя minimum въ maximum, то dW имѣетъ положительное значенiе. Заставимъ потомъ проходить токъ i' въ проводникѣ C' по тому направленiю, которое выбрано для вычисленiя W. Вслѣдствiе этого, разсматривая i' положительнымъ, работа $ii'dW$ электродинамическихъ силъ будетъ положительная. Если же машина переходитъ изъ положенiя maximum въ minimum, то dW имѣетъ отрицательное значенiе. Заставимъ потомъ въ проводникѣ C' проходить токъ въ направленiи, противоположномъ предъидущему; тогда, разсматривая i' отрицательнымъ, работа $ii'dW$ электродинамическихъ силъ все-таки будетъ положительная. Затѣмъ снова возстановимъ первоначальное направленiе въ проводникѣ C' и т. д.

Ясно, что въ направленiи тока постоянно происходитъ измѣненiе, хотя и въ весьма короткое время; слѣдовательно, при каждой перемѣнѣ напряженiе i' проходитъ черезъ нуль. — Если проинтегрировать уравненiе (30) для одной изъ фазъ движенiя, то получимъ:

$$\int (Hi + H'i')\,dt = \int (\lambda i^2 + \lambda' i'^2)\,dt + \int ii'dW \tag{35}$$

Поэтому химическое дѣйствiе столбовъ впродолженiе каждой фазы равно развивающейся въ проводникѣ тепловой энергiи, плюсъ произведенной внѣшней работѣ.

293. Чтобы заставить машину работать, достаточно только одного столба; а именно, аппаратъ можно устроить такимъ образомъ, чтобы одинъ и тотъ же токъ проходилъ по обоимъ проводникамъ C и C' и чтобы направленiе его поперемѣнно измѣнялось въ проводникѣ C'. При этомъ втеченiе первой фазы движенiя $i' = i$, а во время второй $i' = -i$. Такимъ образомъ для первой фазы уравненiе (30) дастъ:

$$i = i_1 - \frac{2(w + w')}{\lambda + \lambda'}\frac{di}{dt} - \frac{2}{\lambda + \lambda'}\frac{d(iW)}{dt} \tag{36}$$

а для второй:

$$i = i_1 - \frac{2(w + w')}{\lambda + \lambda'}\frac{di}{dt} + \frac{2}{\lambda + \lambda'}\frac{d(iW)}{dt} \tag{37}$$

Если предположить i развернутымъ въ строку, а столбъ постояннымъ, то отсюда выйдетъ приблизительная формула:

$$i = i_1 \mp \frac{2i_1}{\lambda + \lambda'}\frac{dW}{dt} \tag{38}$$

Верхнiй знакъ относится къ первой фазѣ, а нижнiй — ко второй. Такъ какъ $\frac{dW}{dt}$ въ первомъ случаѣ положительная, а во второмъ отрицательная, то втеченiе хода машины перемѣнное напряженiе i всегда будетъ менѣе постояннаго напряженiя i_1, которое произвелъ бы столбъ, еслибы машина была въ покоѣ, а именно, оно будетъ

тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе абсолютное значеніе $\frac{dW}{dt}$, т. е. чѣмъ быстрѣе движется машина.

Если уравненіе (35) приложить къ обѣимъ фазамъ періода, то оно дастъ:

$$\int ii'\,dW = \int_0^T i\left[H - (\lambda + \lambda')\,i\right] dt$$

это и есть часть химическаго дѣйствія, перешедшаго въ работу. Если означимъ черезъ i_m среднее значеніе i, то этой величинѣ можно придать видъ

$$(\lambda + \lambda')\,i_m\,(i_1 - i_m)\,T$$

Работа въ единицу времени есть

$$(\lambda + \lambda')\,i_m\,(i_1 - i_m)$$

а потому работа будетъ наибольшая, когда ходъ машины установленъ такъ, что $i_m = \frac{i_1}{2}$.

Коеффиціентъ экономіи машины или отношеніе химическаго дѣйствія, превратившагося въ работу, ко всему дѣйствію, производимому столбомъ, будетъ:

$$\frac{\int\left[Hi - (\lambda + \lambda')\,i^2\right] dt}{\int Hidt} = 1 - \frac{\int(\lambda + \lambda')\,i^2 dt}{\int Hidt} = 1 - \frac{i_m'}{i_1}$$

если i_m' означаетъ также среднюю величину i. Если угодно, этотъ коеффиціентъ экономіи можно привести весьма близко къ единицѣ, и, слѣдовательно, съ теоретической точки зрѣнія сдѣлать машину совершенною. Для этого необходимо только, чтобы напряженіе i было весьма мало, что̀ имѣетъ мѣсто въ весьма быстро движущейся машинѣ. Но производимая при этомъ въ единицу времени работа будетъ также очень мала, а, слѣдовательно, и польза будетъ воображаемая.

294. Чтобы устроить индукціонную машину, состоящую изъ

двухъ сомкнутыхъ проводниковъ C и C', раздѣленныхъ между собою, достаточно ввести одинъ столбъ H въ проводникъ C. Періодическое движеніе проводниковъ, производимое внѣшними силами, служитъ причиною возникновенія тока въ проводникѣ C', движущагося то въ одномъ, то въ другомъ направленіи. По первому изъ уравненій (34), приблизительно имѣемъ:

$$i' = -\frac{i_1}{\lambda'}\,\frac{dW}{dt}$$

Если аппаратъ переходитъ изъ положенія, въ которомъ потенціалъ maximum, въ положеніе minimum, то i' имѣетъ положительное значеніе, а индуктированный токъ идетъ по направленію, выбранному для опредѣленія W. Напротивъ того, если аппаратъ переходитъ изъ положенія minimum въ maximum, то i' перемѣнитъ свой знакъ, и токъ будетъ идти по противоположному направленію; поэтому, и вслѣдствіе натуральнаго хода машины, работа электродинамическихъ силъ постоянно будетъ отрицательная. Въ каждую фазу движенія машина пріобрѣтаетъ внѣшнюю работу, превращающуюся въ теплоту или въ свѣтъ.

295. Можно устроить также электромагнитные двигатели, дѣйствуя на происходящій отъ столба токъ естественнымъ магнитомъ или электромагнитомъ. Мы видѣли раньше (n^0 270), что работа электродинамическихъ силъ, дѣйствующихъ между сомкнутымъ токомъ i и магнитомъ, выражается посредствомъ idW, гдѣ W есть извѣстный потенціалъ, зависящій отъ взаимнаго положенія тока и магнита. Такъ какъ движеніе періодическое, то потенціалъ проходитъ черезъ minimum W_1, и maximum W_2; а потому для полученія постоянно положительной работы необходимо попеременно измѣнять направленіе тока.

Соотвѣтствующая электромагнитная индукціонная машина не требуетъ столба. Относительное движеніе между магнитомъ и проводникомъ возбуждаетъ въ послѣднемъ индуктивный токъ, попеременно измѣняющій свое направленіе, такъ что работа электродинамическихъ силъ idW постоянно будетъ отрицательная.

